GABARITO IME

Matemática

GABARITO COMENTADO

Questão 01

Seja M uma matriz real 2 × 2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M)=\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2 × 2 reais na qual $M^2 = f(M)$.

Solução:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} b & a \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$M^2 = f(M) \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=b \\ ab+bc=a \\ ab+bc=a \\ b^2+c^2=b \end{cases} \Rightarrow a=c \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=b \\ 2ab=a \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ \text{ou} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\text{Se } \begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow b^2=b \left\langle \begin{matrix} b=0 \\ \text{ou} \\ b=1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Se } b=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ M_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Questão 02	

Resolva a inequação, onde $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{9x^2}{\left(1-\sqrt{3x+1}\right)^2} > 4$$

Solução:

$$\left(\frac{3x}{1-\sqrt{3x+1}}\right)^2 > 4 \Rightarrow \frac{3x}{1-\sqrt{3x+1}} < -2 \text{ ou } \frac{3x}{1-\sqrt{3x+1}} > 2$$

Faremos $\sqrt{3x+1} = A$, $A \geq 0 \Rightarrow 3x = A^2 - 1$

i)

$$\frac{3x}{1-\sqrt{3x+1}} < -2 \Rightarrow \frac{A^2-1}{1-A} < -2 \Rightarrow \frac{A^2-1}{1-A} + 2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{A^2-2A+1}{1-A} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(A-1)^2}{(1-A)} < 0$$

$$\Rightarrow A-1 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x+1} > 1$$

$$\Rightarrow 3x+1 > 1$$

$$\Rightarrow x > 0$$

ou

ii)

$$\frac{3x}{1-\sqrt{3x+1}} > 2 \Rightarrow \frac{A^2-1}{1-A} - 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A^2+2A-3}{(1-A)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(A-1)(A+3)}{(1-A)} > 0$$

$$\Rightarrow A+3 < 0$$

$$\Rightarrow A < -3 \ (\textit{não pode, pois, } A \geq 0)$$

Portanto, x > 0.

Questão 03	

Resolve o sistema de equações, onde x ∈ □ e y ∈ □

$$\begin{cases} \log_3(\log_{\sqrt{3}} x) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ (y\sqrt[3]{x})^2 = 3^{143} \end{cases}$$

Solução:

Fazendo a seguinte substituição: $\begin{cases} x = 3^a \\ y = 3^b \end{cases}$, b > 0 para que exista $\log_{\sqrt{3}}(\log_3^y)$

Temos que o sistema passa a ser:

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} 3^a\right) - \log_{\sqrt{3}}\left(\log_3 3^b\right) = 1 \\ \left(3^b \cdot 3^{\frac{a}{3}}\right)^2 = 3^{143} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} 3^a\right) - \log_{\sqrt{3}}\left(\log_3 3^b\right) = 1 \\ 3^{2b+\frac{2a}{3}} = 3^{143} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3(2a) - 2\log_3(b) = 1 \\ 3^{2b+\frac{2a}{3}} = 3^{143} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{2a}{b^2}\right) = 1 \\ 2b + \dfrac{2a}{3} = 143 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a = 3b^2 \\ 6b + 2a = 429 \end{cases} \Rightarrow$$

$6b + 3b^2 = 429 \Leftrightarrow$

$b^2 + 2b - 143 = 0 \Leftrightarrow b = 11$ ou $b = -13$ (não serve, pois b > 0)

$b = 11$ e $a = \dfrac{363}{2}$

Para os valores em x e y temos:

$x = 3^{\frac{363}{2}}$ e $y = 3^{11}$.

Questão 04	

Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x+2y-z=m+1 \\ 2x+my+2z=m^2+2 \\ 2mx+2(m+1)y+(m+1)z=m^3+3 \end{cases}$$

Solução:

$$\Delta_p = \underbrace{\begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 0 & -2 & m-1 \end{vmatrix}}_{L_3 \text{ por } L_3-2L_1-2L_2}$$

$$= (m-2)m(m-1)+4+4(m-2)-4(m-1)$$
$$= m^3-3m^2+2m+\cancel{4}+\cancel{4m}-\cancel{8}-\cancel{4m}+\cancel{4}$$
$$= m(m^2-3m+2)$$
$$= m(m-1)(m-2)$$

i) Se m $\in \mathbb{R} - \{0,1,2\} \Rightarrow \Delta_P \neq 0 \Rightarrow$ o Sistema é possível e determinado.

ii)

$$\text{Se } m=0 \Rightarrow \begin{cases} -2x+2y-z=1 \\ 2x+2z=2 \\ 2y+z=3 \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=3 \\ 2y+z=3 \end{cases} \Rightarrow z=3-2y$$

$\Rightarrow 2x = 2-2(3-2y) \Rightarrow 2x = 4y-4$
$\Rightarrow x = 2y-2$

$\Rightarrow$ todo termo da forma $(2y-2,\ y,\ 3-2y)$ é solução
$\Rightarrow$ o Sistema é possível e indeterminado.

iii)

$$\text{Se } m=1 \begin{cases} -x+2y-z=2 \quad (\times 2) \\ 2x+y+2z=3 \\ 2x+4y+2z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y=7 \\ 8y=8 \end{cases} \text{ incompatíveis}$$

$\Rightarrow$ O sistema é impossível

iv)

$$Se\ m=2\begin{cases}2y-z=3 & (\times(-2))\\ 2x+2y+2z=6 & +\\ 4x+6y+3z=11\end{cases} \qquad +\begin{cases}2y-z=3\\ 2y-z=-1\end{cases} \text{ incompatíveis}$$

$\Rightarrow$ o sistema é impossível

Resumindo: m $\in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \Rightarrow$ Sistema possível e determinado
m $= 0 \Rightarrow$ Sistema possível e indeterminado
m $\in \{1, 2\} \Rightarrow$ Sistema impossível

Questão 05	

Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de a, b e c, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

Solução:

Primeiramente:

$$z^3 + w = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + 3a^2b{\cdot}i - 3ab^2 - b^3{\cdot}i + 47 + c{\cdot}i = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(a^3 - 3ab^2 + 47\right) + \left(3a^2b - b^3 + c\right){\cdot}i = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^3 - 3ab^2 + 47 = 0\ (I) \quad \text{e} \quad 3a^2b - b^3 + c = 0\ (II)$$

De (I) temos: $a^3 - 3ab^2 + 47 = 0 \Leftrightarrow 47 = a\left(3b^2 - a^2\right)$, como a é um número inteiro, este é divisor de 47, logo:

$$a = 1 \Leftrightarrow 47 = \left(3b^2 - 1\right) \Leftrightarrow 3b^2 = 48 \Leftrightarrow b = 4\left(\text{já que b é positivo}\right)\text{ou}$$
$$a = 47 \Leftrightarrow 1 = \left(3b^2 - a^2\right) \Leftrightarrow 3b^2 = 2210 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}.$$

Como $a = 1$ e $b = 4$, temos em (II) que:

$$3{\cdot}1^2{\cdot}4 - 4^3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 52$$
Logo $a = 1$, $b = 4$ e $c = 52$.

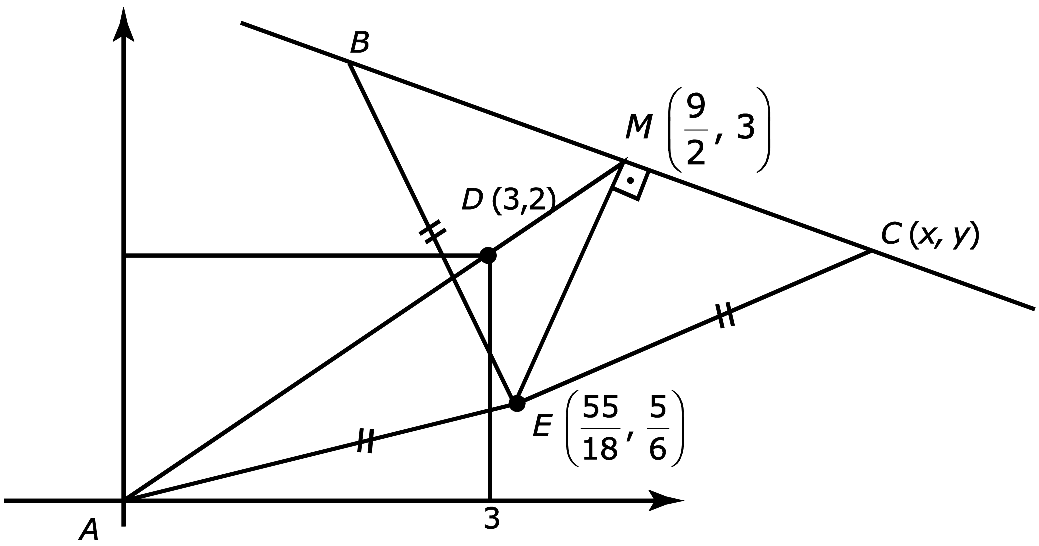
Questão 06

Enunciado

Um triângulo ABC tem o seu vértice A na origem do sistema cartesiano, seu baricentro é o ponto D(3,2) e seu circuncentro é o ponto E(55/18,5/6). Determine:

- a equação da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;
- as coordenadas dos vértices B e C.

Solução:



A) Circunferência com centro *E* e raio *EA*

$$\left(x-\frac{55}{18}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\frac{55}{18}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}\right)^2=\sqrt{\frac{3250}{18^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial:\left(x-\frac{55}{18}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1625}{162}}$$

B)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}(3,2)=\left(\frac{9}{2},3\right)\Rightarrow M=\left(\frac{9}{2},3\right)$$

$$\Rightarrow EM=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{55}{18}\right)^2+\left(3-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{26}{18}\right)^2+\left(\frac{13}{6}\right)^2}=\frac{13}{6}\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\frac{13\sqrt{13}}{18}$$

$$\Delta EMC : MC^2=EC^2-EM^2=\frac{3250}{324}-\frac{2197}{324}=\frac{1053}{324}\Rightarrow MC\ \frac{9\sqrt{13}}{18}$$

$$\Rightarrow MC=\frac{9}{13}\times EM$$

Colocando os pontos no plano de Argand-Gauss

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{EM} \times \frac{9}{13}\, i \Rightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right) + (y - 3)\, i = \left(\frac{26}{18} + \frac{13}{6}\, i\right) \times \frac{9}{13} \times i$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right) + (y - 3)\, i = \left(1 + \frac{3}{2}\, i\right) i \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 3 \\ y - 3 = 1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = (3, 4)}$$

$$M = \frac{B + C}{2} \Rightarrow B = 2M - C = (9, 6) - (3, 4)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = (6, 2)}$$

Questão 07

Se $\dfrac{\cos x}{\cos y} + \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = -1$, calcule o valor S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3\,\text{sen } y - \text{sen } 3y}{\text{sen } x}$$

Solução:

$$\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\text{sen}x}{\text{sen}y} = -1 \Rightarrow \cos x \cdot \text{sen}y + \text{sen}x \cdot \cos y = -\text{sen}y \cdot \cos y$$

Sabendo que: $\begin{cases} \cos 3y = 4\cos^3 y - 3 \cdot \cos y \\ \text{sen}3y = 3 \cdot \text{sen}y - 4 \cdot \text{sen}^3 y \end{cases}$

$$\text{Logo: } \mathbb{S} = \frac{3 \cdot \cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3 \cdot \text{sen}y - \text{sen}3y}{\text{sen}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{S} = \frac{3 \cdot \cos y + 4 \cdot \cos^3 y - 3\cos y}{\cos x} + \frac{3 \cdot \text{sen}y - 3 \cdot \text{sen}y + 4 \cdot \text{sen}^3 y}{\text{sen}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{S} = 4\left[\frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\text{sen}^3 y}{\text{sen}x}\right] = 4T$$

$$\text{onde } T = \frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\text{sen}^3 y}{\text{sen}x} = \frac{\text{sen}x \cdot \cos^3 y + \cos x \cdot \text{sen}^3 y}{\text{sen}x \cdot \cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\text{sen}x \cdot \cos y(1 - \text{sen}^2 y) + \cos x \cdot \text{sen}y(1 - \cos^2 y)}{\text{sen}x \cdot \cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\overbrace{\text{sen}x \cdot \cos y + \cos x \cdot \text{sen}y}^{-\text{sen}y \cdot \cos y} + (-\text{sen}y \cdot \cos y) \cdot (\text{sen}x \cdot \text{sen}y + \cos x \cdot \cos y)}{\text{sen}x \cdot \cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{(\text{sen}x \cdot \cos y + \cos x \cdot \text{sen}y) \cdot (\text{sen}x \cdot \text{sen}y + \cos x \cdot \cos y + 1)}{\text{sen}x \cdot \cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{\cos y}{\cos x} + \frac{\text{sen}y}{\text{sen}x}\right) \cdot (\text{sen}x \cdot \text{sen}y + \cos x \cdot \cos y + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \cdot \text{sen}y \cdot \cos y + \cos^2 y + \frac{\cos y}{\cos x} + \text{sen}^2 y + \frac{\cos x}{\text{sen}x} \cdot \text{sen}y \cdot \cos y + \frac{\text{sen}y}{\text{sen}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 1 + \left(\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x}\right) \cdot \text{sen}y \cdot \cos y + \frac{\text{sen}x \cdot \cos y + \text{sen}y \cdot \cos x}{\text{sen}x \cdot \cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 1 + \left(\frac{1}{\text{sen}x \cdot \cos x}\right) \cdot \text{sen}y \cdot \cos y + \frac{(-\text{sen}y \cdot \cos y)}{\text{sen}x \cdot \cos x} = 1$$

Logo $\mathbb{S} = 4$

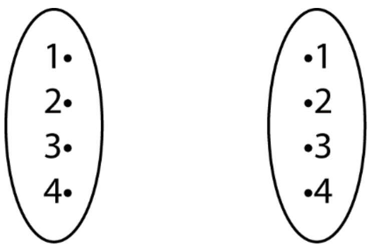
Questão 08

Seja A = {1,2,3,4}.

- Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?
- Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ \underline{g}$ ser uma função constante?

Solução:

(a)



Escolha de 2 elementos na imagem: $C_4^2 = 6$

Total de funções com esta imagem:

Total – não serve = $2^4 - 2$ (imagem com 1 elemento) = 14

Logo: nº de funções = 6 × 14 = 84

(b) A função g pode ter imagem com:

(I) 1 elemento:

nº funções g: 4

nº funções f: este elemento pode se corresponder com 4 elementos os outros 3 elementos podem se corresponder com 4^3 elementos

Logo: $4 \times 4 \times 4^3 = 4^5 = 64 \times 4^2$

(II) 2 elementos:

nº funções g: 84 (item <u>a</u> acima)

nº funções f: estes 2 elementos podem se corresponder com 4 elementos. Os outros 2 elementos podem se corresponder com 4^2 elementos.

Logo: $84 \times 4 \times 4^2 = 21 \times 4^4 = 336 \times 4^2$

(III) 4 elementos:

nº funções g: 4! = 24

nº funções f: estes 4 elementos podem se corresponder com 4 elementos

Logo: $24 \times 4 = 6 \times 4^2$

(IV) 3 elementos:

nº funções g: $4^4 - 4 - 84 - 24 = 256 - 112 = 144$
nº funções f: estes 3 elementos podem se corresponder com 4 elementos, o outro elemento pode se corresponder com 4 elementos.

Logo: $144 \times 4 \times 4 = 144 \times 4^2$

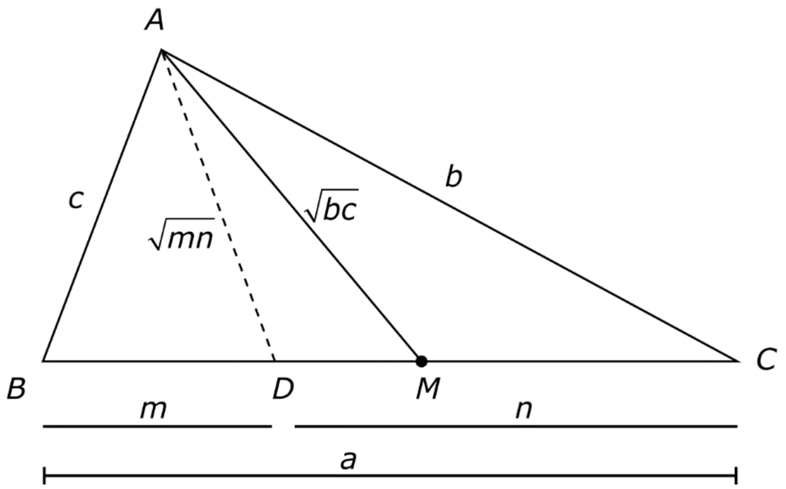
Total de funções ($f \circ g$ = constante) = $(64 + 336 + 6 + 144) \times 4^2 = 550 \times 4^2$

Nº de casos possíveis = $4^4 \times 4^4 = 4^4 \times 4^2 \times 4^2 \Rightarrow P = \dfrac{550 \times 4^2}{4^4 \times 4^2 \times 4} = \dfrac{275}{256 \times 8} = \dfrac{275}{2048}$

Questão 09	

Em um triângulo *ABC*, a medida da bissetriz interna *AD* é a média geométrica entre as medidas dos segmentos *BD* e *DC*, e a medida da mediana *AM* é a média geométrica entre os lados *AB* e *AC*. Os pontos *D* e *M* estão sobre o lado *BC* de medida *a*. Pede-se determinar os lados *AB* e *AC* do triângulo *ABC* em função de *a*.

Solução:



Aplicando o teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{a}{b+c} \Leftrightarrow m = \frac{ac}{b+c} \text{ e } n = \frac{ab}{b+c}$$

Pelo teorema de Stewart nas cevianas $\overline{AD}$ e $\overline{AM}$:

$$\frac{c^2}{am} - \frac{\left(\sqrt{mn}\right)^2}{mn} + \frac{b^2}{an} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{am} = 2 \Leftrightarrow$$

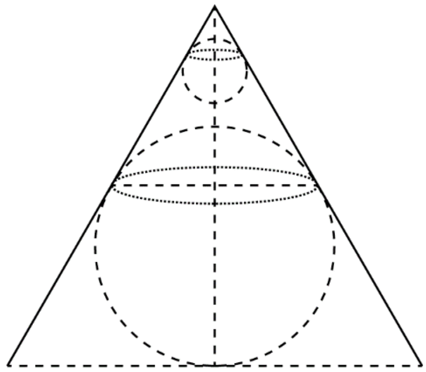
$$\frac{b^2}{a\dfrac{ab}{b+c}} + \frac{c^2}{a\dfrac{ac}{b+c}} = 2 \Rightarrow b + c = a\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{c^2}{\dfrac{a}{2}\cdot a} - \frac{\left(\sqrt{bc}\right)^2}{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}} + \frac{b^2}{\dfrac{a}{2}\cdot a} = 1 \Rightarrow b - c = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

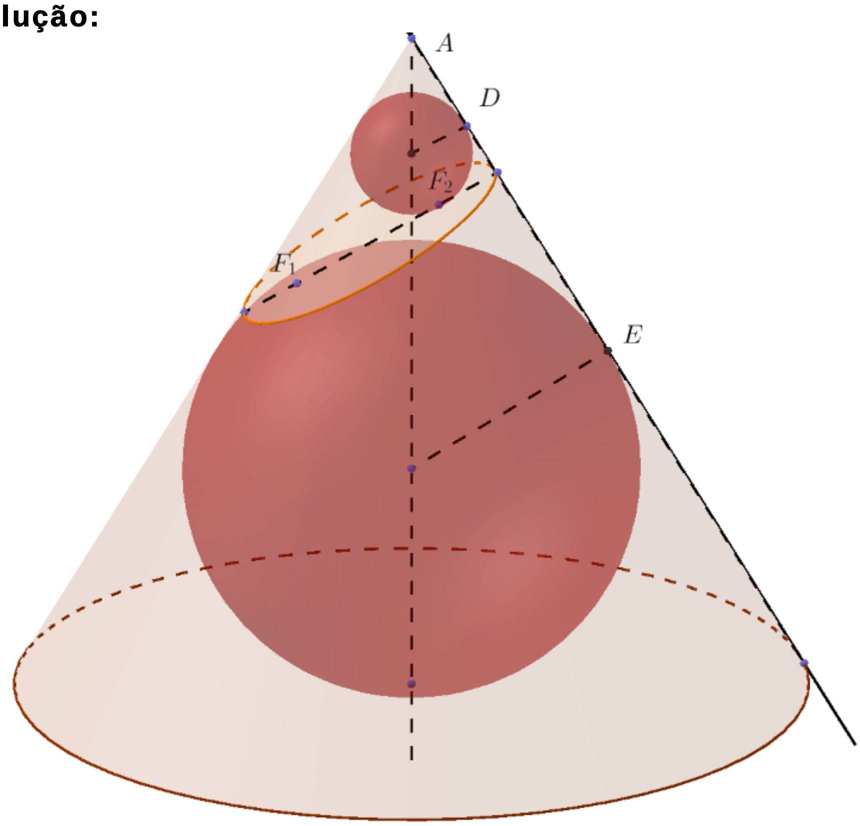
De (1) e (2): $b = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$ e $c = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Questão 10

Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



Solução:



Lema: Pelo teorema de Dandelin o corte na superfície cônica é uma elipse com eixo maior = $2a$, onde $DE = 2a$

$\Rightarrow$ A maior distância entre 2 pontos desse corte é o eixo maior dessa elipse e, portanto, é igual a DE.

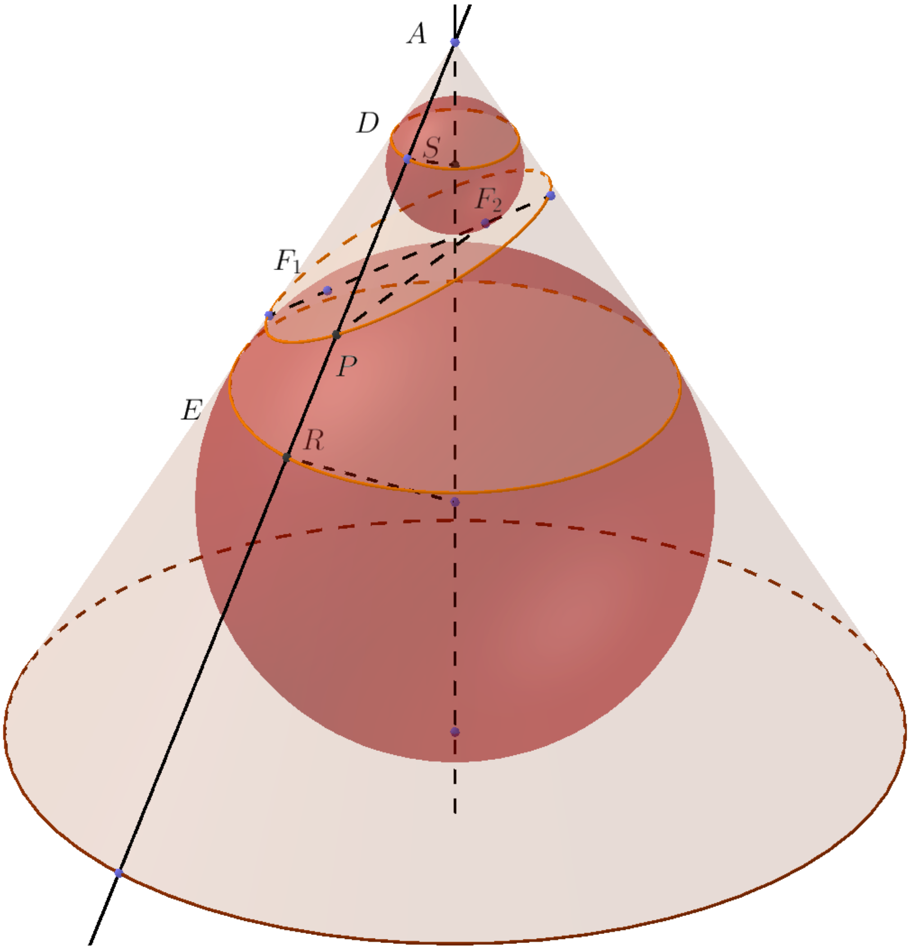
$$\frac{r}{AD} = \text{tg } 30° \Rightarrow AD = r \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = r \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} R$$

$$\frac{R}{AE} = \text{tg } 30° \Rightarrow AE = R \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow DE = AE - AD = R\sqrt{3} - \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}R = \frac{3+\sqrt{3}-3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}R$$

$$\Rightarrow DE = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}R = \frac{6-2\sqrt{3}}{2}R = \left(3-\sqrt{3}\right)R$$



Demonstração do lema: Seja P um ponto do corte e F_1 e F_2 os pontos de contato do plano de corte com as esferas.

PF_1 e PR são duas tangentes traçadas de P à esfera menor $\Rightarrow PF_1 = PR$
PF_2 e PS são duas tangentes traçadas de P à esfera maior $\Rightarrow PF_2 = OS$
$\Rightarrow PF_1 + PF_2 = PR + PS = RS = DE$
$\Rightarrow$ L.G. de P: <u>Elipse</u> de focos F_1 e F_2 e eixo maior DE.

Comentário da prova

Nesse ano a prova veio abrangente, cobrando vários tópicos do ensino médio como matrizes, inequações, logaritmos, sistemas, números complexos, geometria analítica, trigonometria, análise combinatória e geometria plana, além de tópico raros no ensino médio, como seções cônicas e teorema de Dandelin.

O nível de dificuldade veio difícil quando comparado a outros vestibulares e moderado quando comparado a outros anos do IME, possibilitando uma boa distribuição de notas entre os candidatos.

As questões mais fáceis são a 1 e a 4 e as mais difíceis são a 7 e a 8.

A questão 10 foi muito acessível para o candidato que soubesse o teorema de Dandelin.

Mais uma vez queremos parabenizar a banca por uma bela prova que selecionará os melhores candidatos.

Equipe de Matemática

Álvaro Neto
André Felipe
Kessy Jhones
Marcelo Xavier
Rafael Sabino
Ricardo Secco