GABARITO IME

Matemática

GABARITO COMENTADO

Questão 01

Os inteiros a_1, a_2, a_3, ..., a_{25} estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

Solução:

a_1, a_2, a_{10} estão em $PG \Rightarrow a_2^2 = a_1 \times a_{10}$

a_6, a_j, a_{25} estão em $PG \Rightarrow a_j^2 = a_6 \times a_{25}$

$$(a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 9r) \Rightarrow \cancel{a_1^2} + 2a_1 r + r^2 = \cancel{a_1^2} + 9a_1 r$$

$$\Rightarrow r^{\cancel{2}} = 7a_1 \cancel{r}, r \neq 0$$

$$\boxed{r = 7a_1}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_6 = a_1 + 5 \times 7a_1 = 36a_1 \\ a_{25} = a_1 + 24 \times 7a_1 = 169a_1 \end{matrix} \Rightarrow a_j^2 = 36 \times 169 \times a_1^2 \Rightarrow a_j = 6 \times 13 \times a_1$$

$$\Rightarrow a_1 + (j-1) \times 7a_1 = 78a_1$$

$$\Rightarrow 1 + 7j - 7 = 78$$

$$7j = 84$$

$$\boxed{j = 12}$$

Questão 02

Sejam funções f_n, para $n \in \{0,1,2,3\ldots\}$, tais que: $f_0(x) = \dfrac{1}{(1-x)}$ e $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, para $n \geq 1$.

Calcule $f_{2016}(2016)$

Solução:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{1-x}{-x}}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} = f_0(x)$$

Analogamente, $f_0(x) = f_3(x) = f_6(x) = f_9(x) = \ldots = f_{2016}(x)$ uma vez que 2016 é múltiplo de $3 \Rightarrow f_{2016}(2016) = \dfrac{1}{1-2016}$

$$= \boxed{-\frac{1}{2015}}$$

Questão 03

Seja Z um número complexo tal que $\frac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $\frac{3\pi}{4}$ e $\log_3(2Z + 2\overline{Z} + 1) = 2$. Determine o número complexo Z.

Solução:

Seja $Z = r\text{cis}\theta$

$$\log_3(2Z + 2\overline{Z} + 1) = 2 \Rightarrow 2r\text{cis}\theta + 2r\text{cis}(-\theta) + 1 = 9$$

$$\Rightarrow \cancel{4}r\cos\theta = \cancel{8}^{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta > 0 \\ Z = \frac{2}{\cos\theta}(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = 2 + 2i\,\text{tg}\theta \end{cases}$$

$$\frac{2Z}{\overline{Z}i} = \frac{2r\text{cis}\theta}{r\text{cis}(-\theta)\cdot\text{cis}\frac{\pi}{2}} = 2\text{cis}\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \text{tg}\theta = \text{tg}\frac{5\pi}{8}$$

OBS: $\theta \in \left\{\frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$, mas como $\cos\theta > 0$ temos $\theta = \frac{13\pi}{8}$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = \text{tg}\frac{13\pi}{8} = -\text{tg}\frac{3\pi}{8}$$

$$a = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \text{tg}2a = -1 \Rightarrow \frac{2\text{tg}a}{1-\text{tg}^2 a} = -1 \Rightarrow \text{tg}^2 a - 2\text{tg}a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{tg}a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = (-\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow Z = 2 - 2(\sqrt{2} + 1)i$$

Questão 04

Define-se A como a matriz 2016 × 2016, cujos elementos satisfazem à igualdade:

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}, \text{ para } i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

Solução:

Define-se A como a matriz 2016 × 2016, cujos elementos satisfazem à igualdade:

$$ai, j = \binom{i+j-2}{j-1}, \text{para} i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

$$\det A = \Delta_{2016} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \ldots & \binom{2015}{2015} \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \ldots & \binom{2016}{2015} \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \ldots & \binom{2017}{2015} \\ 1 & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \ldots & \binom{2018}{2015} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \binom{2015}{1} & \binom{2016}{2} & \binom{2017}{3} & \ldots & \binom{4029}{2015} \\ 1 & \binom{2016}{1} & \binom{2017}{2} & \binom{2018}{3} & \ldots & \binom{4030}{2015} \end{vmatrix}$$

Jacobi: substituindo cada linha por ela menos a anterior temos:

$$\det A = \Delta_{2016} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \ldots & \binom{2015}{2015} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \ldots & \binom{2015}{2014} \\ 0 & \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \ldots & \binom{2016}{2014} \\ 0 & \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \ldots & \binom{2017}{2014} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \binom{2016}{2} & \ldots & \binom{4028}{2014} \\ 0 & \binom{2015}{0} & \binom{2016}{1} & \binom{2017}{2} & \ldots & \binom{4030-1}{2015-1} \end{vmatrix}$$

Laplace na 1ª coluna:

$$\det A = \Delta_{2015} = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \ldots & \binom{2015}{2014} \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \ldots & \binom{2016}{2014} \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \ldots & \binom{2017}{2014} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \binom{2016}{2} & \ldots & \binom{4028}{2014} \\ \binom{2015}{0} & \binom{2016}{1} & \binom{2017}{2} & \ldots & \binom{4030-1}{2015-1} \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente Jacobi (substituindo cada linha por ela menos a anterior):

$$\det A = \Delta_{2015} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \dots & \binom{2015}{2014} \\ 0 & \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{2015}{2013} \\ 0 & \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \dots & \binom{2016}{2013} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \dots & \binom{4027}{2013} \\ 0 & \binom{2015}{0} & \binom{2016}{1} & \dots & \binom{4030-2}{2015-2} \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente Laplace na 1ª coluna:

$$\det A = \Delta_{2014} = \begin{vmatrix} \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{2015}{2013} \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \dots & \binom{2016}{2013} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{2014}{0} & \binom{2015}{1} & \dots & \binom{4027}{2013} \\ \binom{2015}{0} & \binom{2016}{1} & \dots & \binom{4030-2}{2015-2} \end{vmatrix}$$

Continuando este processo teremos:

$$\det A = \Delta_1 = \left|\binom{4030-2015}{2015-2015}\right| \Leftrightarrow \det A = \left|\binom{2015}{0}\right| \Leftrightarrow \det A = 1$$

Questão 05	

Determine o conjunto solução da equação:

$$(\text{sen}\, x)(1+\text{tg}\, x\, \text{tg}\, \frac{x}{2}) = 4 - \text{cotg}\, x$$

Solução:

Condições de existência:

$$\begin{cases} \text{tg}x : x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \text{tg}\dfrac{x}{2} : x \neq (2k+1)\pi \\ \text{cotg}x : x \neq k\pi \end{cases}$$

$$(\text{sen}x)\left(1+\text{tg}x\text{tg}\frac{x}{2}\right) = 4 - \cot gx \Leftrightarrow (\text{sen}x)\left(1+\frac{\text{sen}x}{\cos x}\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = 4 - \cot gx \Leftrightarrow$$

$$(senx)\left(\frac{\cos x \cos\frac{x}{2} + senxsen\frac{x}{2}}{\cos x \cos\frac{x}{2}}\right) = 4 - \cot gx \Leftrightarrow (\text{sen}x)\left(\frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cos\frac{x}{2}}\right) = 4 - \cot gx \Leftrightarrow$$

$$(\text{sen}x)\left(\frac{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\cos x \cancel{\cos\frac{x}{2}}}\right) = 4 - \cot gx \Leftrightarrow \text{tg}x = 4 - \cot gx \Leftrightarrow \text{tg}x + \cot gx = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x} = 4 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\text{sen}x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2\text{sen}x\cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{sen}2x} = 2 \Leftrightarrow \text{sen}2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi + \dfrac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \dfrac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in z)$$

Questão 06

Seja a equação $n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$. Determine todos os pares inteiros (m, n) que satisfazem a esta equação.

Solução:

$$n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49 \Leftrightarrow n^2 - 7m^2 = 25m^2 - 20mn + 4n^2 + 49 \Leftrightarrow$$

$$32m^2 - 20mn + 3n^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow 32m^2 - 20mn + 3n^2 = -49 \Leftrightarrow$$

$$(n - 4m)(3n - 8m) = -49 \Leftrightarrow (n - 4m)(8m - 3n) = 49$$

$$1^\circ Caso: \begin{cases} n - 4m = 49 \\ 8m - 3n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -37 \\ n = -99 \end{cases}$$

$$2^\circ Caso: \begin{cases} n - 4m = 1 \\ 8m - 3n = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -13 \\ n = -51 \end{cases}$$

$$3^\circ Caso: \begin{cases} n - 4m = -49 \\ 8m - 3n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 37 \\ n = 99 \end{cases}$$

$$4^\circ Caso: \begin{cases} n - 4m = -1 \\ 8m - 3n = -49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 51 \end{cases}$$

$$5^\circ Caso: \begin{cases} n - 4m = 7 \\ 8m - 3n = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = 21 \end{cases}$$

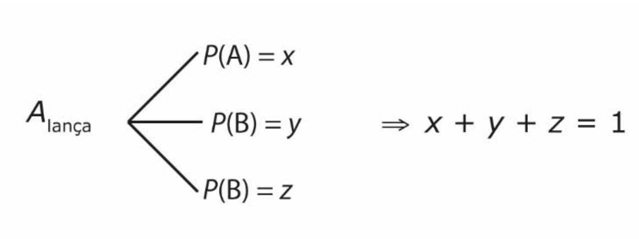
$$6^\circ Caso: \begin{cases} n - 4m = -7 \\ 8m - 3n = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -7 \\ n = -21 \end{cases}$$

Questão 07

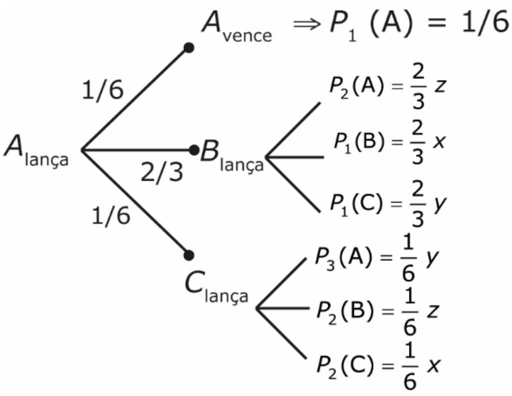
Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando neste sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual é a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

Solução:

Seja x a probabilidade do lançador ganhar
Seja y a probabilidade do seguinte ganhar
Seja z a probabilidade do mais afastado do lançador ganhar



Vamos recalcular P(A), P(B) e P(C) analisando o que acontece após o 1° lançamento



$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6}z \\ z = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{6}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 4x + z \\ 6z = 4y + x \end{cases} \Rightarrow 6\,(6y - 4x) = 4y + x$$

$$36y - 24x = 4y + x$$

$$\Rightarrow y = \frac{25x}{32}$$

$$\Rightarrow z = 6 \times \frac{25x}{32} - 4x \Rightarrow z = \frac{22x}{32}$$

$$\Rightarrow x + \frac{25x}{32} + \frac{22x}{32} = 1 \Rightarrow 79x = 32$$

$$\Rightarrow x = \frac{32}{79}$$

Questão 08	

A circunferência C tem equação $x^2 + y^2 = 16$. Seja C' uma circunferência de raio 1 que se desloca tangenciando internamente a circunferência C, sem escorregamento entre os pontos de contato, ou seja, C' rola internamente sobre C.

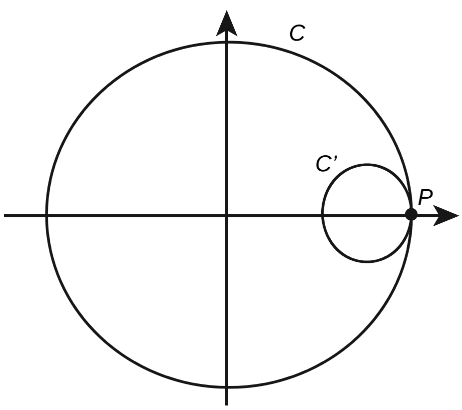


Figura a

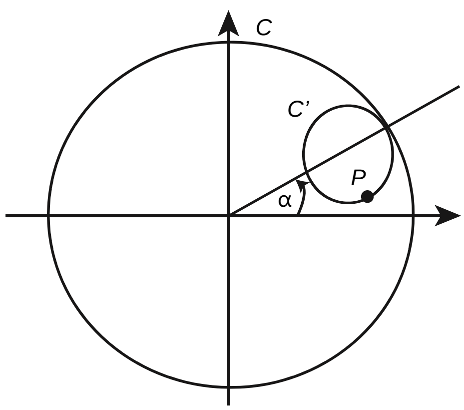
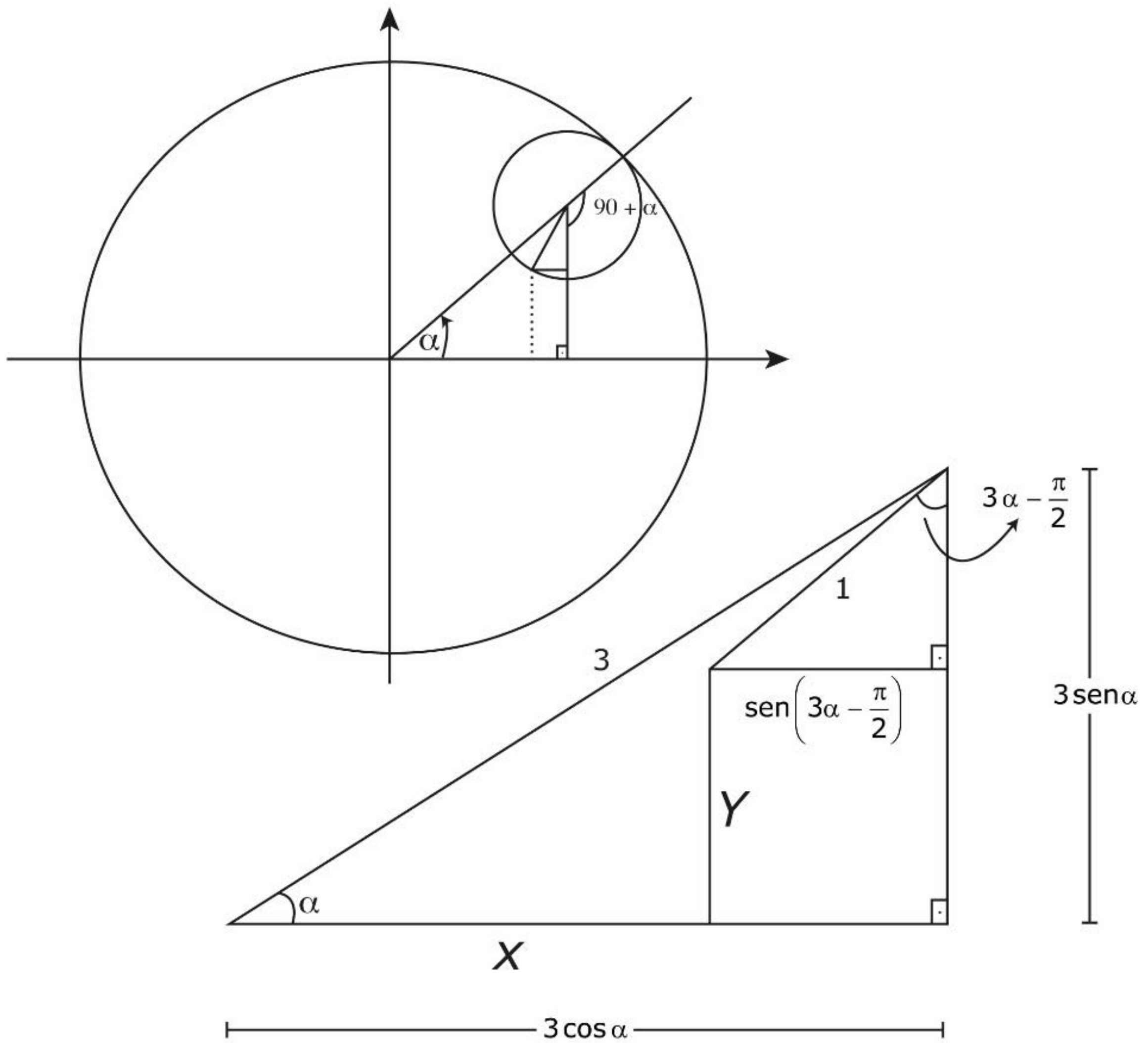


Figura b

Define-se o ponto *P* sobre *C'* de forma que no início do movimento de *C'* o ponto *P* coincide com o ponto de tangência (4,0), conforme figura *a*. Após certo deslocamento, o ângulo de entre o eixo *x* e a reta que une o centro das circunferências é α, conforme figura *b*.

- Determine as coordenadas do ponto *P* marcado sobre *C'* em função do ângulo α.
- Determine a equação em coordenadas cartesianas do lugar geométrico do ponto *P* quando α varia no intervalo $[0, 2\pi)$.

Solução:



a. Há dois modos de medir o caminho realizado por *P*, pela circunferência maior ou pela menor, igualando as duas obtemos:

$r_1\,\alpha_1 = r_2\alpha_2 \rightarrow 4\alpha = 1\cdot\theta$

$x = 3\cos\alpha - \text{sen}(3\alpha - 90)$
$x = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$
$x = 4\cos^3\alpha$

$y = 3\text{sen}\alpha - \cos(3\alpha - 90)$
$y = 3\text{sen}\alpha + \text{sen}3\alpha$
$y = 4\text{sen}^3\alpha$
$P = (4\cos^3\alpha, 4\text{sen}^3\alpha)$

b.
$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ e $\text{sen}\alpha = \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$
$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Questão 09	

Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro *O* no ponto *C'* segundo um ângulo de 45°. Sejam *A* e *B* os pontos extremos desta corda, e a distância *AC'* igual a $\sqrt{3}+1$ cm. O raio do círculo mede 2 cm, e *C* é a extremidade do diâmetro mais distante de *C'*. O prolongamento do segmento *AO* intercepta *BC* em *A'*. Calcule a razão em que *A'* divide *BC*.

Solução:

1ª Solução:

Lei dos Senos no $\Delta AOC'$:

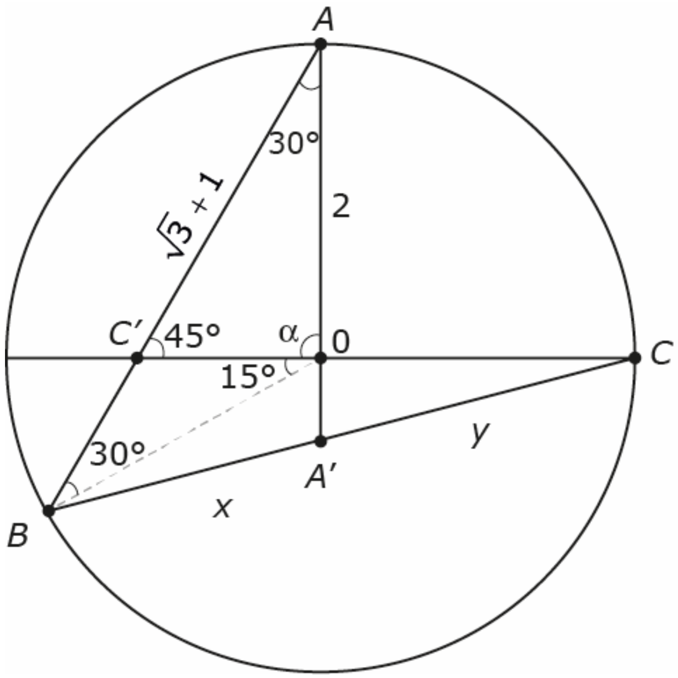
$$\frac{AC'}{\text{sen}\alpha} = \frac{AO}{\text{sen}45} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\text{sen}\alpha} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cancel{\alpha = 75^\circ} \text{ ou } \alpha = 105^\circ$$

Razão de Áreas:

$$\frac{S(A'OB)}{S(A'OC)} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{OA'.\cancel{OB}\text{sen}60^\circ}{2}}{\frac{OA'.\cancel{OC}\text{sen}105^\circ}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\text{sen}60^\circ}{\text{sen}105^\circ} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\cancel{4}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}$$

2ª Solução:



Sendo AÔC′ = α e aplicando lei dos senos em AOC′ temos:

$$\frac{2}{\operatorname{sen}45} = \frac{\sqrt{3}+1}{\operatorname{sen}\alpha} \therefore \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Daí α = 75° ou α = 105°

Onde α = 75° não serve pois o triângulo AOB deveria ser equilátero o que não é possível, logo, α = 105° e daí OAC′ = 30°.

Traçando $\overline{AC}$ temos $A\hat{O}C$ = 75° e $\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \dfrac{S_{AA'C}}{S_{AA'B}}$

Fazendo $O\hat{A}C$ = β e aplicando lei dos senos em AOC, temos:

$$\frac{2}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}75^\circ} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{2\operatorname{sen}75^\circ}{\overline{AC}} \qquad (\mathrm{I})$$

$$S_{AA'C} = \frac{\overline{AC}\cdot AA'\cdot\operatorname{sen}\beta}{2} \quad \therefore \quad S_{AA'B} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AA'}\cdot\operatorname{sen}30^\circ}{2}$$

$$\frac{S_{AA'C}}{S_{AA'B}} = \frac{\overline{AC}\cdot\cancel{AA'}\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cancel{2}}\cdot\frac{2}{\overline{AB}\cdot\cancel{AA'}\cdot\operatorname{sen}30^\circ}$$

$$\frac{\overline{AC}\cdot\operatorname{sen}\beta}{\overline{AB}\cdot\operatorname{sen}30^\circ} \quad (\mathrm{II})$$

Fazendo I em II

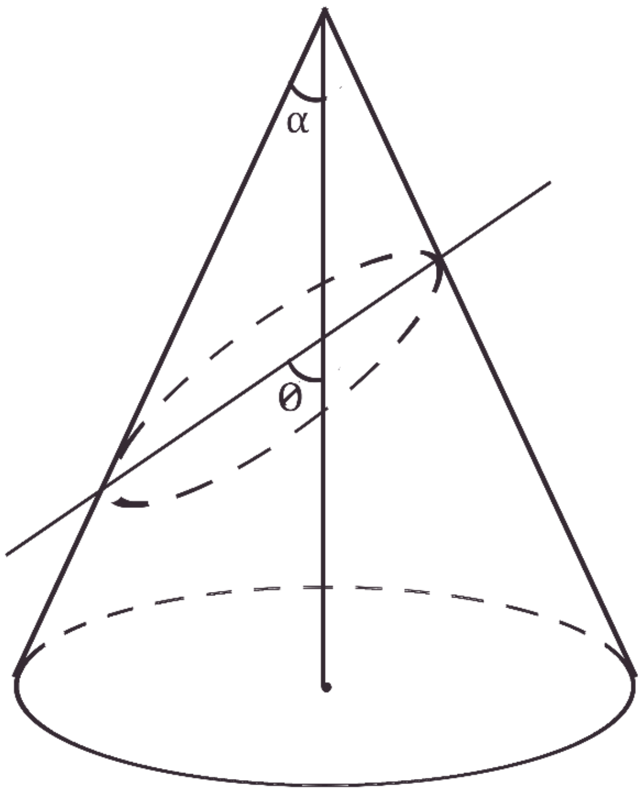
$$\frac{\cancel{AC}\cdot 2\,\text{sen}75°}{\cancel{AC}\ AB\cdot \text{sen}30°}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{AB\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\cancel{2}\cdot AB\cdot\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}\ ..$$

Por potência de ponto $BC'=\sqrt{3}-1$ e $\overline{AB}=2\sqrt{3}$. Logo, $\frac{A'B}{A'C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

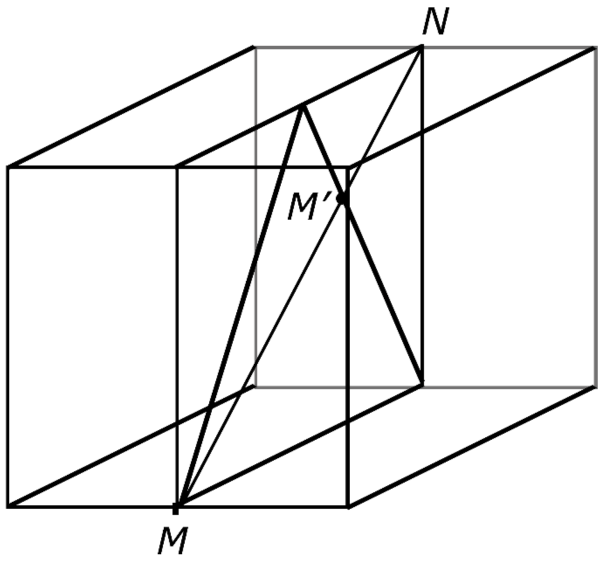
Questão 10

Um cone é inscrito em um cubo *ABCDEFGH* de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base *ABCD*. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice *H* na base *ABCD* coincide com o vértice *D*. Determine a área da seção do cone pelo plano *ABH* em função de *a*, a medida da aresta do cubo.

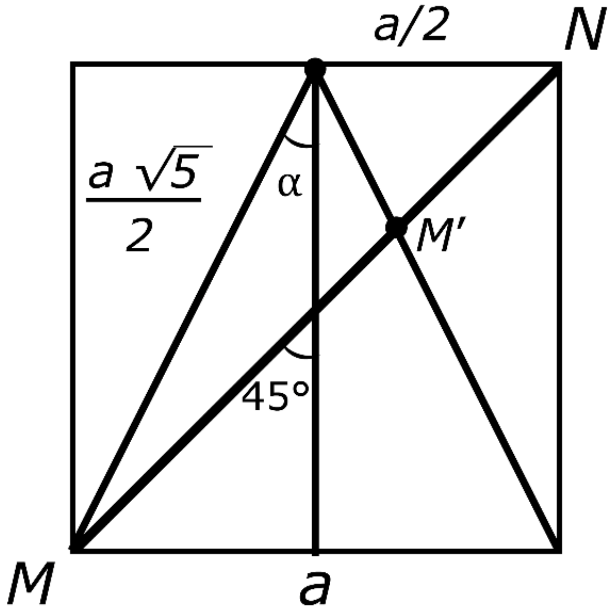
1ª Solução:



$$\text{Excentricidade}=\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$$



Eixo maior da elipse= MM'



$$\frac{M'N}{MM'} = \frac{a/2}{a} \Rightarrow M'N = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{x}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$\Rightarrow$ Semi-eixo maior da elipse $= \dfrac{a\sqrt{2}}{3} = a_E$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = \frac{\cos 45°}{a / a\sqrt{5}/2} = \frac{\sqrt{2}/2}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

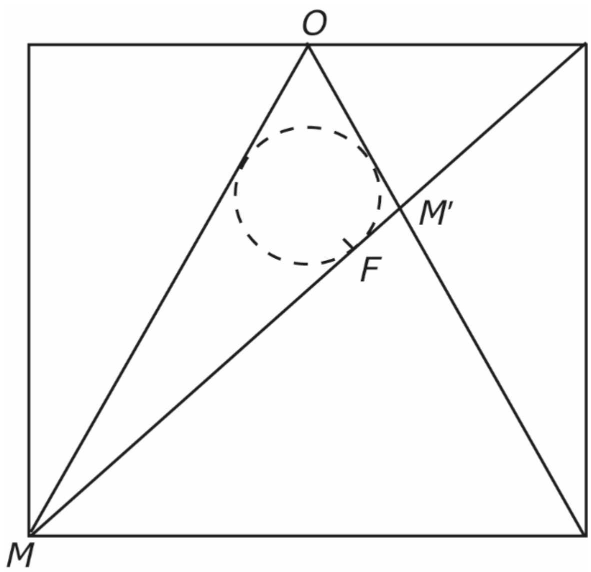
$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\cancel{2}a\sqrt{5}}{\underset{6}{\cancel{12}}}$$

$$b_E^2 + c_E^2 = a_E^2 \Rightarrow b_E^2 + \frac{5a^2}{36} = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow b_E^2 = \frac{3a^2}{36} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow Área = \pi \times a_E \times b_E = \pi \times \frac{a\sqrt{2}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{18}$$

2ª Solução:

Após encontrarmos $a_e = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, usaremos que o foco é o ponto de contato entre o plano de corte e a esfera que tangencia as geratrizes do cone e o plano de corte (teorema de Dandelin)



M’F = semi-perimetro – *OM*

$$OM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$MM' = 2a\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$OM' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

$$\Rightarrow M'F = \frac{1}{2}\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3} + \frac{4a\sqrt{5}}{6}\right) - \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{3} - \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

$$\Rightarrow a_e - c_e = \frac{a\sqrt{2}}{3} - \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{a\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{3}} - c_e = \frac{a\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{3}} - \frac{a\sqrt{5}}{6} \Rightarrow c_e = \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

$$\Rightarrow b_e^2 + \frac{5a^2}{36} = \frac{2a^2}{9} \Rightarrow b_e^2 = \frac{3a^2}{36} \Rightarrow b_e = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow área = \pi \times \frac{a\sqrt{2}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi a^2\sqrt{6}}{18}$$

Comentário:

Apesar de não ser uma novidade encontrar uma prova do IME de Matemática muito difícil, vale ressaltar que a deste ano foi particularmente ainda mais difícil que as dos anos anteriores. A prova tinha apenas duas questões fáceis (as duas primeiras) e outras duas médias (a questão 3, de Números Complexos, e a 8, de Geometria Analítica). Excetuando-se essas questões, a prova não tinha nada de tão tranquilo. A questão 5, de Trigonometria, era factível, porém era necessário escolher o caminho correto para não se perder em grandes contas. Os outros cinco problemas restantes foram considerados difíceis. É possível que, devido ao alto nível da prova, haja poucos aprovados para o restante do processo seletivo.

Professores
André Felipe
Bruno Pedra
Jean Pierre
Marcelo Xavier
Ricardo Secco
Rodrigo Menezes
Tuane Viana