Gabarito - Colégio Naval 2016/2017
Matemática – Prova Amarela

PROFESSORES:

Carlos Eduardo (Cadu)
André Felipe
Bruno Pedra
Jean Pierre

QUESTÃO 1

Considere uma circunferência de centro “O” e raio “r”. Prolonga-se o diâmetro AB de um comprimento BC de medida igual a “r” e, de “C”, traça-se uma tangente que toca a circunferência em “D”. A perpendicular traçada de “C”, a BC, intersecta a reta que passa por “A” e “D” em “E”. Sendo assim, a área do triângulo ODE em função do raio é

$(A)\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$

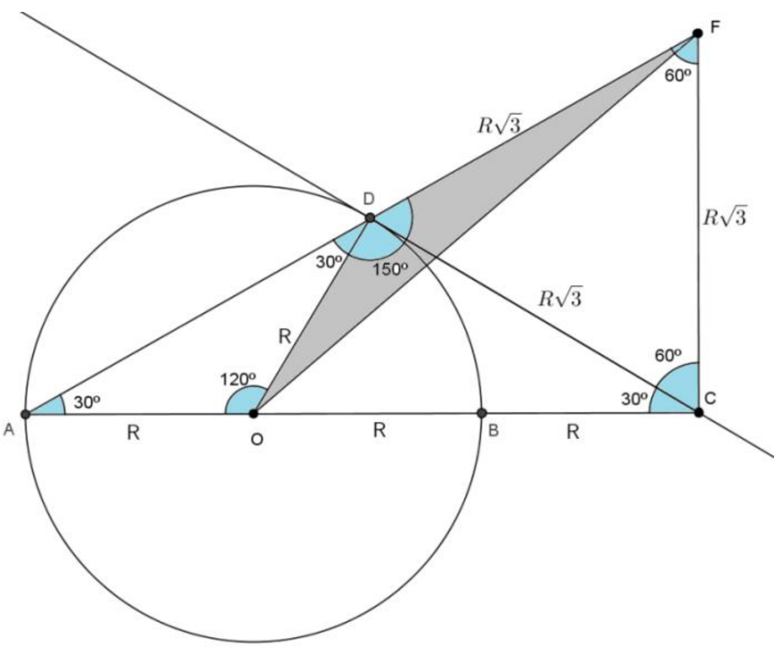
$(B)r^2\sqrt{6}$

$(C)\dfrac{r^2\sqrt{2}}{2}$

$(D)\dfrac{r^2\sqrt{2}}{4}$

$(E)r^2\sqrt{3}$

SOLUÇÃO:



$$S=\frac{1}{2}ab.sen(\theta)$$

$$S=\frac{1}{2}R.R\sqrt{3}.sen(150^o)$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}.\frac{1}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

GABARITO: [A]

QUESTÃO 2

Sejam as operações $\therefore$ e # definidas no conjunto dos inteiros positivos, tais que $x \therefore y = 2^x + y$ e $x \# y = x^2 + xy - 1$. Determine o sucessor do número resultante da expressão $\left[(1\#3)^{1\#2}\right] \therefore \left[(1\#2)\#(2\#1)\right]$.

(A) 523
(B) 524
(C) 525
(D) 526
(E) 527

SOLUÇÃO:

Dada a equação $\left[(1\#3)^{1\#2}\right] \therefore \left[(1\#2)\#(2\#1)\right]$ e os algoritmos $x \therefore y = 2^x + y$ e $x \# y = x^2 + xy - 1$, temos:

$1\#3 = 1^2 + 1.3 - 1 = 3$
$1\#2 = 1^2 + 1.2 - 1 = 2$
$2\#1 = 2^2 + 2.1 - 1 = 5$

Logo,

$$\left[(1\#3)^{1\#2}\right] \therefore \left[(1\#2)\#(2\#1)\right] = \left[(3)^2\right] \therefore [2\#5]$$

$2\#5 = 2^2 + 2.5 - 1 = 13$ e $9 \therefore 13 = 2^9 + 13 = 512 + 13 = 525$

Temos,

$$\left[(1\#3)^{1\#2}\right] \therefore \left[(1\#2)\#(2\#1)\right] = \left[(3)^2\right] \therefore [2\#5] = 9 \therefore 13 = 525$$

$$Sucessor(525) = 525 + 1 = 526$$

GABARITO: [D]

QUESTÃO 3

Uma placa será confeccionada de modo que o emblema da empresa seja feito de um metal que custa R$ 5,00 o centímetro quadrado. O emblema consiste em três figuras planas semelhantes que lembram três árvores. Para as bases dessas "árvores", constroem-se segmentos de reta proporcionais a 3, 4 e 5. Se o custo da maior árvore do emblema ficou em R$ 800,00. Qual o valor, em reais, de todo o emblema?

$(A)1600$

$(B)1500$

$(C)1200$

$(D)1120$

$(E)1020$

SOLUÇÃO:

Temos que $S_A, S_B\, e\, S_C$ são as áreas das três figuras planas semelhantes.

A área $S_C = \frac{800}{5} = 160cm^2$. Logo,

$$\frac{S_A}{3^2} = \frac{S_B}{4^2} = \frac{S_C}{5^2} = \frac{S_A + S_B + S_C}{3^2 + 4^2 + 5^2}$$
$$\frac{160}{5^2} = \frac{S_A + S_B + S_C}{3^2 + 4^2 + 5^2}$$
$$S_A + S_B + S_C = \frac{160.50}{5^2} = 320cm^2$$

Portanto,

$$Custo\,total\,(C_t):$$
$$C_t = 320.5 = 1600$$

GABARITO: [A]

QUESTÃO 4

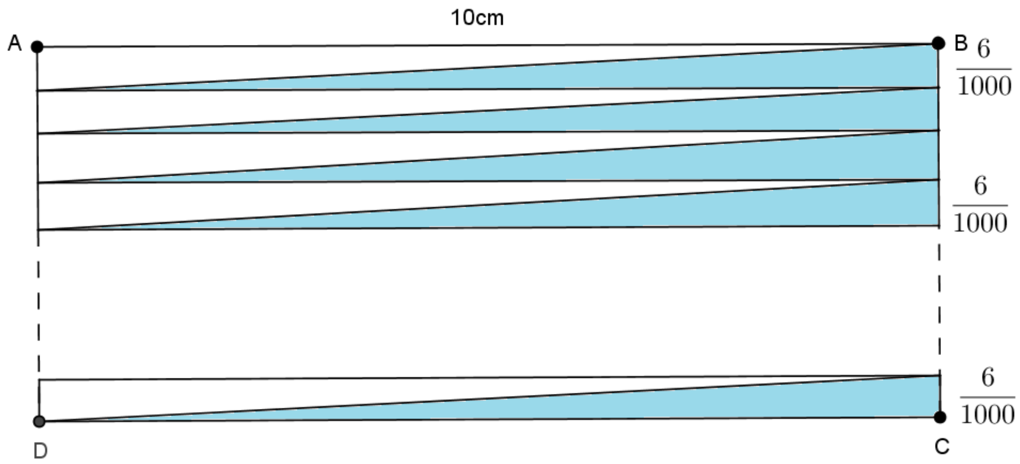
Um retângulo de lados medindo 6cm e 10cm deve ser dividido em triângulos retângulos que tenham pelo menos um lado com medida representada por um número inteiro. Quaisquer que sejam dois desses triângulos, eles terão, no máximo, um lado em comum. A maior quantidade de triângulos retângulos que se pode obter, nas condições apresentadas é:

(A) menor do que 80.
(B) exatamente 80.
(C) maior do que 8- e menor do que 240.
(D) exatamente 240.
(E) maior do que 240.

SOLUÇÃO:

Traçando 1000 retas paralelas a base do retângulo equiespaçadas tal que formemos 1000 retângulos de base 10 e altura $\frac{6}{1000}$. Traçando uma diagonal qualquer desses retângulos iremos dividir a figura em 2000 triângulos retângulos congruentes de catetos 10 e $\frac{6}{1000}$.

Nesse sentido, traçando n retas paralelas a um dos lados obteremos n retângulos congruentes. Ao traçarmos uma diagonal qualquer, obteremos 2n triângulos retângulos congruentes. Para n suficientemente grande poderemos obter tantos triângulos retângulos quanto se queira.



GABARITO: [E]

QUESTÃO 5

Seja o quadrado ABCD de lado 2. Traça-se, com centro no ponto M, médio do lado AB, uma semicircunferência de raio 2 que intersecta os lados BC e AD, respectivamente, em "E" e "F". A área da superfície externa à semicircunferência e que também é interna ao quadrado, é igual a:

$(A) 3-\sqrt{3}$

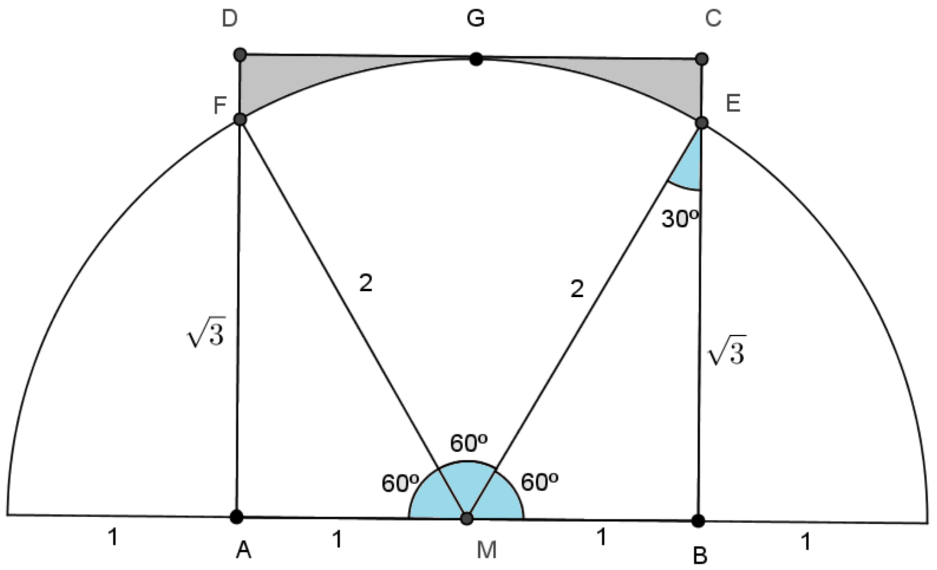
$(B) 2-\sqrt{3}$

$(C) 3+\sqrt{3}$

$(D) 2-\sqrt{3}$

$(E) 3-\sqrt{2}$

SOLUÇÃO:



$$S_h = S_{ABCD} - \left(S_{AFM} + S_{BEM} + S_{Setor(EFM)}\right)$$

$$S_h = 2^2 - \left(\frac{1.\sqrt{3}}{2} + \frac{1.\sqrt{3}}{2} + \frac{60^o}{360^o}.\pi 2^2\right), com\, \pi = 3 temos:$$

$$S_h = 4 - \left(\sqrt{3} + 2\right)$$

$$S_h = 2 - \sqrt{3}$$

GABARITO: [B]

QUESTÃO 6

Dado o polinômio $ax^k + 2x^2 - t$, com $(a,k,t) \in \mathbb{N}$, $a < k$ e sabendo que $P(1) = 0$, $P(-2) = 51$, determine a soma dos algarismos do número $w = t^{15}(a-1)^{20}$ e, a seguir, assinale a opção correta.

(A) 20
(B) 15
(C) 10
(D) 8
(E) 5

SOLUÇÃO:

Temos, $P(x) = ax^k + 2x^2 - t$

(i)
$$\begin{aligned} &P(1) = 0 \\ &a + 2 - t = 0 \\ &a + 2 = t \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} &P(-2) = 51 \\ &a(-2)^k + 2(-2)^2 - t = 51 \\ &a(-2)^k + 2(-2)^2 - (a+2) = 51 \\ &a(-2)^k + 8 - a - 2 = 51 \\ &(-2)^k = \frac{45 + a}{a} = \frac{45}{a} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a < k \, e \, a, k \in N \\ a = d_{\mathbb{N}}(45) = 1, 3, 5, 9, 15, 45 \end{cases}$$

$$a = 3 \Rightarrow (-2)^k = 16 \Rightarrow k = 4 \quad (V)\ 3 < 4$$

$$a = 15 \Rightarrow (-2)^k = 4 \Rightarrow k = 2 \quad (F)\ 15 > 2$$

Logo,

$$t = a + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$w = t^{15}(a-1)^{20} = 5^{15}(3-1)^{20} = 5^{15}.2^{20} = \left(5^{15}.2^{15}\right)2^5 = 10^{15}.32$$

$$w = 32\underbrace{00...00}_{15 zeros}$$

$$S(w) = 3 + 2 + 0 + 0 + ... + 0 + 0 = 5$$

GABARITO: [E]

QUESTÃO 7

Adão, Beto e Caio uniram-se num mesmo investimento e combinaram que, em janeiro de cada ano, repartiriam o lucro obtido em partes diretamente proporcionais ao tempo de investimento e ao valor investido. Adão investiu R\$10.000,00 há nove meses; Beto R\$15.000,00 há oito meses e Caio R\$12.000,00 há cinco meses. Se o lucro a ser repartido é de R\$54.000,00, o maior recebimento será de

(A) R\$10.000,00
(B) R\$12.000,00
(C) R\$15.000,00
(D) R\$18.000,00
(E) R\$24.000,00

SOLUÇÃO:

$$A:\begin{cases} R\$10.000,00 \\ 9\ meses \end{cases} \quad B:\begin{cases} R\$15.000,00 \\ 8\ meses \end{cases} \quad C:\begin{cases} R\$12.000,00 \\ 5\ meses \end{cases}$$

$$L_A + L_B + L_C = 54000 \Rightarrow 10000.9k + 15000.8k + 12000.5k = 54000 \Leftrightarrow$$

$$90k + 120k + 60k = 54 \Leftrightarrow 270k = 54 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} L_A = 10000.9k \\ L_B = 15000.8k \\ L_C = 12000.5k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_A = 10000.9.\frac{1}{5} \\ L_B = 15000.8.\frac{1}{5} \\ L_C = 12000.5.\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_A = 18000 \\ L_B = 24000\ (maior\ recebimento) \\ L_C = 12000 \end{cases}$$

GABARITO: [E]

QUESTÃO 8

Dados os conjuntos $A=\{f,g,h,k\}$, $B=\{g,h,k\}$, $C=\{f,g\}$ e sabendo que X é construído a partir das seguintes informações:

I - $X \subset A\cup B\cup C$
II - $X\cap C=\{f\}$
III - $B-X=\{g,h\}$

Pode-se afirmar que:

(A) $\left[(A-X)\cup C\right]-B=\{f,g\}$
(B) $\left[(X-A)\cap C\right]=\{f,g,k\}$
(C) $\left[(A-B)\cup X\right]-C=\{g,h\}$
(D) $\left[X\cap(A-B)\right]\cup C=\{g,h,k\}$
(E) $\left[(A-X)\cap(B-X)\right]=\{g,h\}$

SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} A=\{f,g,h,k\} \\ B=\{g,h,k\} \\ C=\{f,g\} \end{cases} \Rightarrow A\cup B\cup C=\{f,g,h,k\}$$

$$X\cap C=\{f\}\Leftrightarrow X\cap\{f,g\}=\{f\}\Rightarrow \begin{cases} f\in X \\ g\notin X \end{cases}$$

$$B-X=\{g,h\}\Leftrightarrow\{g,h,k\}-X=\{g,h\}\Rightarrow \begin{cases} g,h\notin X \\ k\in X \end{cases} \Rightarrow X=\{f,k\}$$

Agora analisaremos as alternativas:

Alternativa A

$$\left[(A-X)\cup C\right]-B=\{f,g\}$$
$$A-X=\{f,g,h,k\}-\{f,k\}\Leftrightarrow A-X=\{g,h\}$$
$$(A-X)\cup C=\{g,h\}\cup\{f,g\}\Leftrightarrow(A-X)\cup C=\{f,g,h\}$$
$$\left[(A-X)\cup C\right]-B=\{f,g,h\}-\{g,h,k\}=\{f\}\ \ FALSA$$

Alternativa B

$\left[\left(X-A\right)\cap C\right]=\left\{f,g,k\right\}$

$X-A=\left\{f,k\right\}-\left\{f,g,h,k\right\}\Leftrightarrow X-A=\varnothing$

$\left(X-A\right)\cap C=\varnothing\cap C\Leftrightarrow\left[\left(X-A\right)\cap C\right]=\varnothing$ *FALSA*

Alternativa C

$\left[\left(A-B\right)\cup X\right]-C=\left\{g,h\right\}$

$A-B=\left\{f,g,h,k\right\}-\left\{g,h,k\right\}\Leftrightarrow A-B=\left\{f\right\}$

$\left(A-B\right)\cup X=\left\{f\right\}\cup\left\{f,k\right\}\Leftrightarrow\left(A-B\right)\cup X=\left\{f,k\right\}$

$\left[\left(A-B\right)\cup X\right]-C=\left\{f,k\right\}-\left\{f,g\right\}\Leftrightarrow\left[\left(A-B\right)\cup X\right]-C=\left\{k\right\}$ *FALSA*

Alternativa D

$\left[X\cap\left(A-B\right)\right]\cup C=\left\{g,h,k\right\}$

$X\cap\left(A-B\right)=\left\{f,k\right\}\cap\left\{f\right\}\Leftrightarrow X\cap\left(A-B\right)=\left\{f\right\}$

$\left[X\cap\left(A-B\right)\right]\cup C=\left\{f,k\right\}\cup\left\{f,g\right\}\Leftrightarrow\left[X\cap\left(A-B\right)\right]\cup C=\left\{f,g,k\right\}$ *FALSA*

Alternativa E

$\left[\left(A-X\right)\cap\left(B-X\right)\right]=\left\{g,h\right\}$

$B-X=\left\{g,h,k\right\}-\left\{f,k\right\}\Leftrightarrow B-X=\left\{g,h\right\}$

$\left[\left(A-X\right)\cap\left(B-X\right)\right]=\left\{g,h\right\}\cap\left\{g,h\right\}\Leftrightarrow\left[\left(A-X\right)\cap\left(B-X\right)\right]=\left\{g,h\right\}$ *VERDADEIRA*

GABARITO: [E]

QUESTÃO 9

Três pessoas A, B e C, que fizeram uma prova de múltipla escolha tiveram o seguinte resultado: A acertou 50% das questões, respondendo corretamente 9 das 15 primeiras e 1/5 das questões restantes; B acertou 20% do total mais 3 questões e C 30% do total menos uma questão. Com relação à quantidade de acertos, podemos afirmar:

(A) $A>B+C$
(B) $A-B=2C$
(C) $A+B<2C+3$
(D) $2B+1=A+C$
(E) $2A-B>3C$

SOLUÇÃO:

Temos as expressões para A, B e C:

$$A = 9 + \frac{1}{5}(t - 15) = 50\%t$$
$$B = 20\%t + 3$$
$$C = 30\%t - 1$$

Em A temos,

$$9 + \frac{1}{5}(t - 15) = 50\%t$$
$$9 + \frac{t}{5} - 3 = \frac{t}{2}$$
$$6 = \frac{t}{2} - \frac{t}{5}$$
$$6 = \frac{3t}{10}$$
$$t = 20$$

Logo,

$$A = 50\%t = 50\%20 = 10$$
$$B = 20\%t + 3 = 20\%.20 + 3 = 7$$
$$C = 30\%t - 1 = 30\%.20 - 1 = 5$$

$$2B + 1 = A + C$$
$$2.7 + 1 = 10 + 5 = 15$$

GABARITO: [D]

QUESTÃO 10

Na divisão exata do número k por 50, uma pessoa, distraidamente, dividiu por 5, esquecendo o zero e, dessa forma, encontrou um valor 22,5 unidades maior que o esperado. Qual o valor do algarismo das dezenas do número k?

$(A)1$

$(B)2$

$(C)3$

$(D)4$

$(E)5$

SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} K = 50t \\ K = 5(t + 22,5) \end{cases}$$

Logo,

$$50t = 5(t + 22,5)$$
$$50t = 5t + 112,5$$
$$45t = 112,5$$
$$t = \frac{112,5}{45} = 2,5$$
$$k = 50.2,5 = 125$$

$$Alg.Dez.(125) = 2$$

GABARITO: [B]

QUESTÃO 11

Analise as afirmativas abaixo:

I – Todo triângulo retângulo de lados inteiros e primos entre si possui um dos lados múltiplo de “5”.

II – Em um triângulo retângulo, o raio do círculo inscrito é igual ao perímetro do triângulo menos a hipotenusa.

III – Há triângulos que não admitem triângulo ótico, ou seja, o triângulo formado pelos pés das alturas.

IV – O raio do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o dobro da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(B) Apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.

SOLUÇÃO:

I) Como todo quadrado perfeito é congruente a 0, 1, ou 4 no módulo 5, se a², b² e c² forem diferentes de 0 mod 5 então $a^2+b^2-c^2$ deixará restos 1,2,3,4 dessa forma $a^2+b^2=c^2$ nunca será verificado. Logo um dos lados do triângulo será múltiplo de 5.(verdadeiro)

II) $r=p-a$ (Falso)

III) No triângulo retângulo o triângulo órtico degenera num segmento de reta. (verdadeiro)

IV) $R=\dfrac{a}{2}$ (Falso)

GABARITO: [A]

QUESTÃO 12

Sejam x e y números reais tais que $xy=2\sqrt{3}$. Sendo assim, o valor mínimo de x^8+y^8 é

(A) múltiplo de 18.
(B) um número primo.
(C) divisível por 5.
(D) divisível por 13.
(E) par maior que 300.

SOLUÇÃO:

$$Como\, x^8 \geq 0\, e\, y^8 \geq 0, temos:$$

$$M_A \geq M_G$$

$$\frac{x^8+y^8}{2} \geq \sqrt{x^8.y^8}$$

$$\frac{x^8+y^8}{2} \geq x^4.y^4$$

$$\left(x^8+y^8\right) \geq 2.x^4.y^4$$

Temos,

$$xy=2\sqrt{3}$$

$$(xy)^4 = x^4.y^4 = \left(2\sqrt{3}\right)^4 = 2^4.3^2 = 144$$

Logo,

$$\left(x^8+y^8\right) \geq 2.x^4.y^4 = 2.144 = 288$$

$$\left(x^8+y^8\right)_{Mín.} = 288 = 18.16$$

GABARITO: [A]

QUESTÃO 13

Seja "A" o conjunto solução da inequação $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{x^2-1}$ no universo dos reais $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}-A$ é

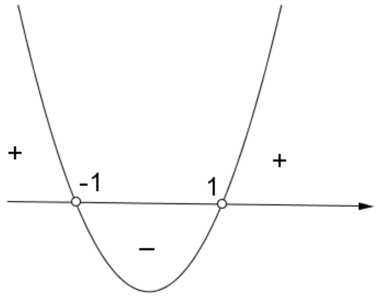
$(A)\{-1,+1\}$.
$(B)]-1,+1]$.
$(C)[-1,+1]$.
$(D)]-\infty,+1]$.
$(E)]-1,\infty[$.

SOLUÇÃO:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{x^2-1}$$
$$M.M.C.\left(x+1,x-1,x^2-1\right)=(x+1)(x-1).$$
$$\text{Re}\,strição:$$
$$x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$$
$$x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$$

Logo,

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\geq 0$$
$$\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$
$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}\geq 0\ \Rightarrow\ (x+1)(x-1)>0$$

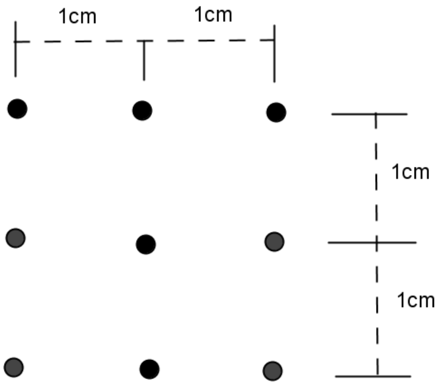


$$A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<-1\,ou\,x>1\}$$
$$\mathbb{R}-A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\leq x\leq 1\}=[-1,1]$$

GABARITO: [C]

QUESTÃO 14

Observe a figura a seguir.



A figura acima exibe nove pontos que são vértices, ou pontos médios de lados, ou centro de um mesmo quadrado. Esses pontos devem ser conectados com segmentos de reta, de modo que cada ponto seja extremidade de, no máximo, dois segmentos de reta. Deseja-se que a soma dos comprimentos de todos os segmentos de reta, assim traçados, seja a maior possível. O valor mais próximo dessa soma, em centímetros, é:

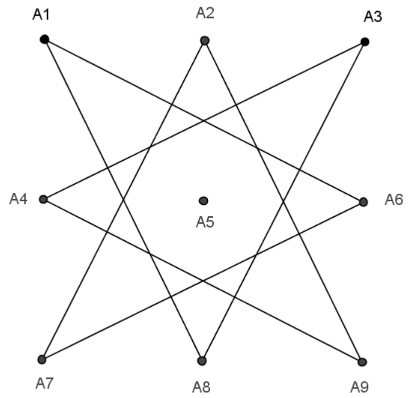
(A) 10
(B) 11
(C) 15
(D) 18
(E) 20

SOLUÇÃO:

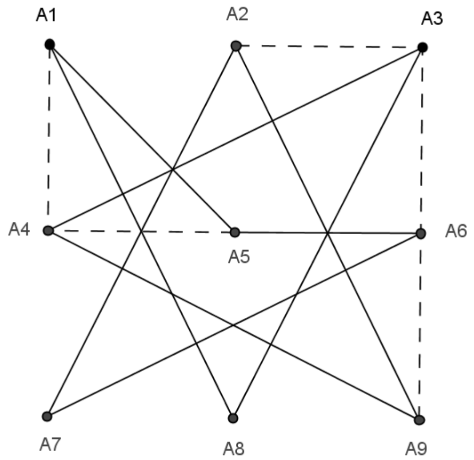
Utilizando os nove pontos da figura e sabendo que de cada vértice só podemos traçar no máximo dois segmentos de reta, o número máximo de segmentos utilizados será $\frac{9.2}{2}=9$, ou seja, devemos maximizar a soma $a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c.1$ em que a, b e c representam a quantidade de segmentos de cada tipo com $a+b+c\leq 9$.

- no máximo podemos traçar 8 segmentos de medida $\sqrt{5}$.

1° Caso) com $a=8$, obtemos a figura abaixo:
A soma S dos segmentos será dada por $S=8\sqrt{5}\cong 17,88$



2° Caso) com $a = 7$, obtemos a figura abaixo:
A soma S dos segmentos será dada conforme raciocínio abaixo:



Temos os segmentos:

$(i)\, A_2A_9 = A_1A_8 = A_8A_3 = A_3A_4 = A_4A_9 = A_2A_7 = A_7A_6$

$O\ \Delta_{A_2A_3A_9}$ *é retângulo:*

$(A_2A_9)^2 = (A_2A_3)^2 + (A_3A_9)^2$

$(A_2A_9)^2 = (1)^2 + (2)^2$

$A_2A_9 = \sqrt{5}$

$(ii)\, A_5A_6 = 1$

$(iii)\, A_1A_5$

$O\ \Delta_{A_1A_4A_5}$ *é retângulo:*

$(A_1A_5)^2 = (A_1A_4)^2 + (A_4A_5)^2$

$(A_1A_5)^2 = (1)^2 + (1)^2$

$(A_1A_5)^2 = \sqrt{2}$

$Logo:$

$S = \left(\sqrt{5}\right).7 + 1 + \sqrt{2}$

$S \cong 15,65 + 1 + 1,41 = 18,06$

$S \cong 18 u.c.$

GABARITO: [D]

QUESTÃO 15

Analise as afirmativas abaixo:

(I) Se $\frac{x+y+z}{3} = 7$ e $\frac{x+y+z+t}{4} = 5$, então $t = 2$.

(II) Se $\frac{16+20+x_1+x_2+x_3+...+x_{10}}{12} = 8$, então $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_{10}}{10} = 6$.

(III) Se $\frac{x+y+z}{3} = a$ e $\frac{x^2+y^2+z^2}{3} = b$, então $\frac{xy+xz+yz}{3} = \frac{3a^2-b}{2}$.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

SOLUÇÃO:

$$(I)\ \frac{x+y+z}{3} = 7 \Leftrightarrow x+y+z = 21$$

$$\frac{x+y+z+t}{4} = 5 \Leftrightarrow x+y+z+t = 20 \Rightarrow 21+t = 20 \Leftrightarrow t = -1\ \ FALSA$$

$$(II)\ \frac{16+20+x_1+x_2+x_3+...+x_{10}}{12} = 8 \Leftrightarrow 36+x_1+x_2+x_3+...+x_{10} = 96 \Leftrightarrow$$

$$x_1+x_2+x_3+...+x_{10} = 60 \Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_{10}}{10} = \frac{60}{10} = 6\ \ VERDADEIRA$$

$$(III)\begin{cases}\dfrac{x+y+z}{3}=a\Leftrightarrow x+y+z=3a\\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}=b\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=3b\end{cases}$$

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\Rightarrow(3a)^2=3b+2(xy+xz+yz)\Leftrightarrow$$

$$9a^2-3b=2(xy+xz+yz)\Leftrightarrow 3a^2-b=2\frac{(xy+xz+yz)}{3}\Leftrightarrow\frac{xy+xz+yz}{3}=\frac{3a^2-b}{2}\ \ VERDADEIRA$$

GABARITO: [C]

QUESTÃO 16

Considere as divisões de números naturais, em que D é o divisor. A soma de todos os restos possíveis e pares dessas divisões é 182. Sabendo que D é ímpar e múltiplo de 3, o resto da divisão de $\left[(2+0+1+5).2015\right]^{2016}+\left[(2+0+1+6).2016\right]^{2015}$ por D é

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 15
(E) 16

SOLUÇÃO:

$$\textit{Restos possíveis na divisão por } D:\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ D-1$$

$$0+2+4+6+\ldots+D-1=182\Leftrightarrow 2\left(1+2+3+\ldots+\frac{D-1}{2}\right)=182\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+\frac{D-1}{2}=91\Rightarrow$$

$$\frac{D-1}{2}=13\Leftrightarrow D-1=26\Leftrightarrow D=27\,(\textit{múltiplo de } 3 \textit{ e ímpar})$$

$$\textit{Analisando módulo } 27 \textit{ temos}\,(1998 \textit{ é múltiplo de } 27):$$

$$\left[(2+0+1+5).2015\right]^{2016}+\left[(2+0+1+6).2016\right]^{2015}\equiv[8.2015]^{2016}+[9.2016]^{2015}\equiv$$

$$[8.17]^{2016}+[9.18]^{2015}\equiv 136^{2016}+(27.2)^{2015}\equiv 1^{2016}+0^{2015}\equiv 1$$

GABARITO: [B]

QUESTÃO 17

Seja $p(x)=x^2-2016x-2017$ um polinômio com "x" real tal que $p(60002)=k$. Sendo assim, o valor de $p(-57986)$ é

(A) k
(B) $2k+1$
(C) k^2
(D) $3k^2-1$
(E) $5-k^2$

SOLUÇÃO:

Por ser um polinômio do 2° grau, podemos calcular o vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-2016)}{2.1} \Leftrightarrow x_v = \frac{2016}{2} \Leftrightarrow x_v = 1008$$

Além disso, o polinômio do 2° grau é simétrico em relação ao vértice. Logo,

$$\begin{cases} 60002-1008=58994 \\ 1008-(-57986)=58994 \end{cases} \Rightarrow p(-57986)=p(60002) \Rightarrow p(-57986)=k$$

GABARITO: [A]

QUESTÃO 18

O conjunto solução da equação $x+1=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+4x+1}}$ em $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, é:

$(A)\ \mathbb{R}.$
$(B)\ [-1,\infty[.$
$(C)\ \mathbb{R}-[-1,\infty[.$
$(D)\ [0,\infty[.$
$(E)\ \left[-\frac{1}{2},\infty\right[.$

SOLUÇÃO:

$\text{Re}\,strições:$

$$R_1: \sqrt{4x^2+4x+1} \Rightarrow 4x^2+4x+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$R_2: \sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+4x+1}} \Rightarrow \underset{\geq 0}{x^2} + \underbrace{\sqrt{4x^2+4x+1}}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$R_3: x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Temos,

$$x+1=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+4x+1}}$$
$$x+1=\sqrt{x^2+\sqrt{(2x+1)^2}}$$
$$x+1=\sqrt{x^2+|2x+1|}$$
$$(x+1)^2=x^2+|2x+1|$$
$$|2x+1|=2x+1$$

Como,

$$|f(x)|=f(x)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$$
$$Logo:$$
$$2x+1\geq 0$$
$$Solução\ \ S_1:\ \ x\geq -\frac{1}{2}$$

$$Solução\ final:$$
$$S_1\cap R_1\cap R_2\cap R_3=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -\frac{1}{2}\right\}=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

GABARITO: [E]

QUESTÃO 19

Calcule o valor de $X=\left(\dfrac{\sqrt{1^{1256}}+8943^0+\dfrac{3125}{5^5}+\sqrt[7]{1}}{1,5-2^{-1}+(-1)^{2058}}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}+3^{23}}{10}}}$ assinale a opção correta.

$(A)\,2^{16}$
$(B)\,2^{20}$
$(C)\,2^{24}$
$(D)\,2^{26}$
$(E)\,2^{27}$

SOLUÇÃO:

$$X=\left(\frac{\sqrt{1^{1256}}+8943^{0}+\frac{3125}{5^{5}}+\sqrt[7]{1}}{1{,}5-2^{-1}+(-1)^{2058}}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}+3^{23}}{10}}}$$

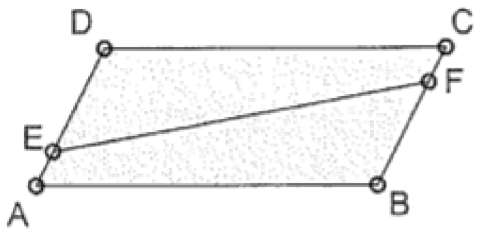
$$X=\left(\frac{1+1+1+1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1}\right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21}\left(1+3^{2}\right)}{10}}}$$

$$X=\left(\frac{4}{2}\right)^{\sqrt[7]{3^{21}}}=(2)^{3^{3}}=2^{27}$$

GABARITO: [E]

QUESTÃO 20

Observe a figura a seguir.



ABCD é um paralelogramo. E e F estão sobre os lados desse paralelogramo de tal forma que AE = CF = x < AD. Sendo assim, baseado na figura acima, assinale a opção correta.

(A) Qualquer reta que intersecte dois lados de um paralelogramo o divide em dois polígonos de mesma área.
(B) Qualquer reta que intersecte dois lados de um paralelogramo o divide em dois polígonos de mesmo perímetro.
(C) A área de um trapézio é o produto de sua base média pela sua altura.
(D) O dobro da soma dos quadrados das medidas dos lados paralelos de um trapézio é igual à soma dos quadrados das medidas de suas diagonais.
(E) Para todo x, o segmento de reta EF é a metade do segmento de reta AB.

SOLUÇÃO:

$$A = \frac{B+b}{2}h$$
$$A = B_{Média}.h$$

GABARITO: [C]