Gabarito - Colégio Naval 2015/2016
Matemática – Prova Amarela

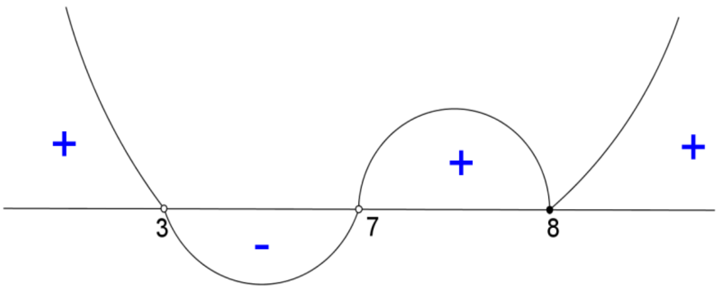
Professores:

Carlos Eduardo (Cadu)
André Felipe
Bruno Pedra
Rafael Sabino
Gilberto Gil

QUESTÃO 1

Dada a inequação, podemos reescrevê-la e, a partir do Teorema de Bolzano, concluímos:

$$\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \le 0 \quad \rightarrow \quad \frac{25(x-8)^2}{(x-3)(x-7)} \le 0$$, ou seja:



Seja S' o conjunto solução. Temos: $S' =]3,7[\cup \{8\}$, logo:

$$S = 4+5+6+8 = 23$$

GABARITO: (B)

QUESTÃO 2

Dado o sistema abaixo, temos as possíveis classificações:

$$S: \begin{cases} 2x - ay = 6 \\ -3x + 2y = c \end{cases}$$

(i) Sistema Possível Determinado $(S.P.D.)$:

$$\frac{2}{-3} \ne \frac{-a}{2} \quad \rightarrow \quad a \ne \frac{4}{3}$$

(ii) Sistema Possível Indeterminado $(S.P.I.)$:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-a}{2} = \frac{6}{c} \quad \rightarrow \quad a = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad c = -9$$

(iii) Sistema Impossível $(S.I.)$:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-a}{2} \ne \frac{6}{c} \quad \rightarrow \quad a = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad c \ne -9$$

LETRA C: Se $a=\frac{4}{3}$ e $c=9$, o sistema S não admite solução;

O sistema é impossível ($S.I.$), pois $a=\frac{4}{3}$ e $c\neq -9$.

LETRA E: Se $a=\frac{4}{3}$ e $c=-9$, o sistema S admite infinitas soluções;

O sistema é indeterminado ($S.P.I.$), pois $a=\frac{4}{3}$ e $c=-9$.

Portanto, temos dois gabaritos, letra C e letra E.

OBS: duplo gabarito - anular questão.

GABARITO: (C ou E)

QUESTÃO 3

Reescrevendo os números temos:

$$\underbrace{9999...99}_{2015}7=\underbrace{9999...999}_{2016}-2=\left(10^{2016}-1\right)-2=10^{2016}-3$$

$$\underbrace{9999...99}_{2015}4=\underbrace{9999...999}_{2016}-5=\left(10^{2016}-1\right)-5=10^{2016}-6$$

Ou seja,

$$k=\left(\frac{\left(9999...997\right)^2-9}{9999...994}\right)^3=\left(\frac{\left(10^{2016}-3\right)^2-3^2}{10^{2016}-6}\right)^3=\left(\frac{\left(10^{2016}-3+3\right)\left(10^{2016}-3-3\right)}{\left(10^{2016}-6\right)}\right)^3$$

$$k=\left(\frac{\left(10^{2016}\right)\left(10^{2016}-6\right)}{\left(10^{2016}-6\right)}\right)^3=\left(10^{2016}\right)^3=10^{6048}$$

Para o que se pede, temos:

$$\sqrt[i]{k}=\sqrt[i]{10^{6048}}=\sqrt[i]{\left(10^{189}\right)^{32}}\quad\rightarrow\quad i=2^{n_{máx}}=32$$

GABARITO: (A)

QUESTÃO 4

Dados do problema:

$$r_1 = 7m \rightarrow t_1 = 5h$$
$$r_2 = 14m \rightarrow t_2 = ?$$

Temos a regra de três:

$Área\left(m^2\right)$	$\text{Tempo}(h)$
$\pi.5^2$	5
$\pi.14^2$	t

$$\rightarrow \frac{\pi.5^2}{\pi.14^2} = \frac{5}{t} \rightarrow t = 20$$

GABARITO: (C)

QUESTÃO 5

Dados do problema:

$$n_1 \in [2,3\ ;\ 3,1] \quad \text{e} \quad p_1 = 3,5$$
$$n_2 \quad \text{e} \quad p_2 = 3,5$$
$$n_3 = 7 \quad \text{e} \quad p_3 = 3$$
$$Me = \frac{p_1(n_1) + p_2(n_2) + p_3(n_3)}{p_1 + p_2 + p_3} = 5,6$$

Temos que:

$$(i) Me = \frac{3,5.(2,3) + 3,5.(n_2) + 3.(7)}{3,5 + 3,5 + 3} = 5,6 \quad \rightarrow \quad n_{2(máx)} = 14,1$$
$$(ii) Me = \frac{3,5.(3,1) + 3,5.(n_2) + 3.(7)}{3,5 + 3,5 + 3} = 5,6 \quad \rightarrow \quad n_{2(mín)} = 13,3$$

$$n_2 \in [13,3\ ;\ 14,1]$$

Logo,

$$n_{2(máx)} - n_{2(mín)} = 0,8$$

GABARITO: (C)

QUESTÃO 6

De um triângulo de lados 3, 4 e 5 (Triângulo Retângulo). Sobre suas alturas podemos afirmar que:

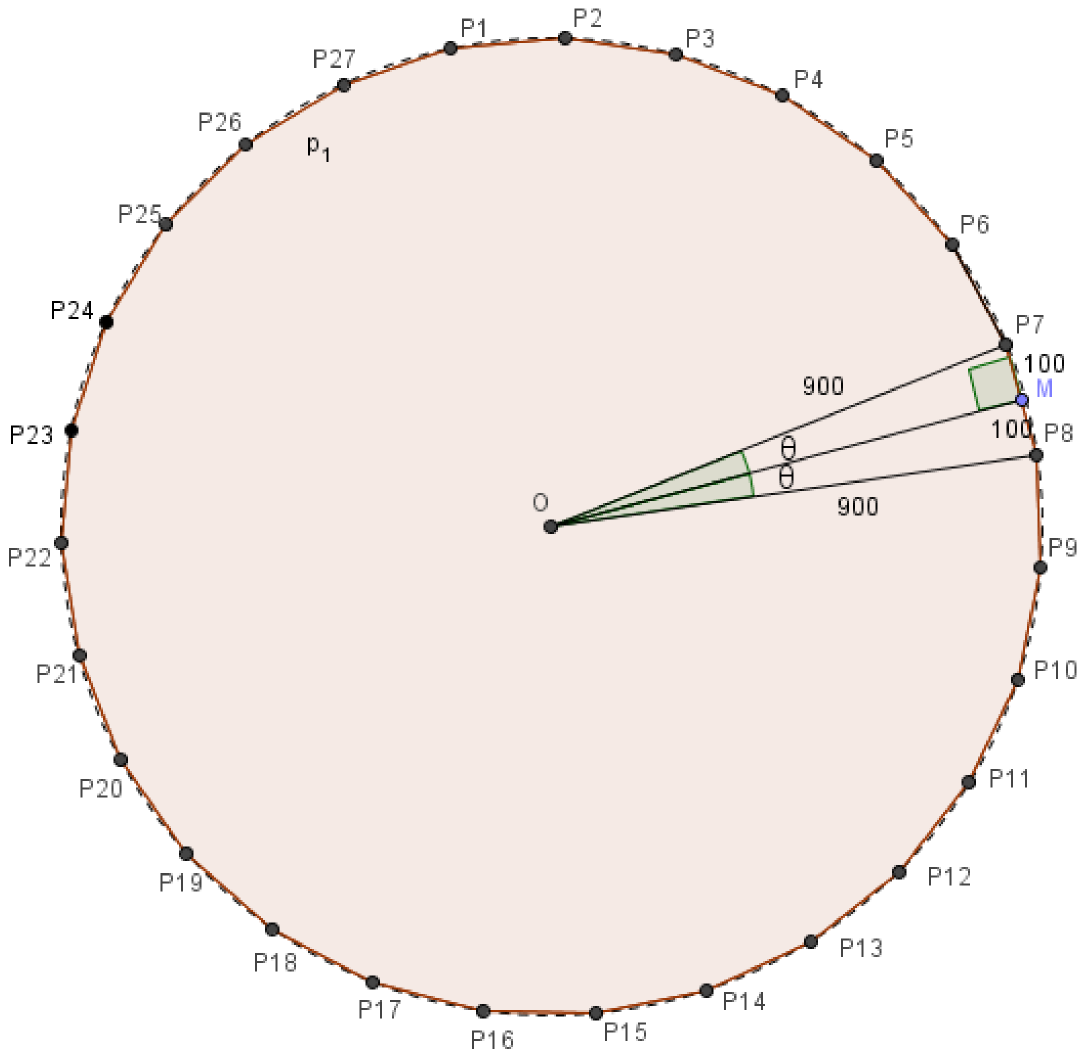
$$S = \frac{3.h_1}{2} = \frac{4.h_2}{2} = \frac{5.h_3}{2}$$

Para o mesmo resultado de área, quanto maior a altura, menor será a medida do lado relativo esta altura, ou seja:

Para o menor lado $(l_1 = 3)$, a altura relativa a este lado será a maior do triângulo $(h_1 = 4)$.

GABARITO: (C)

QUESTÃO 7



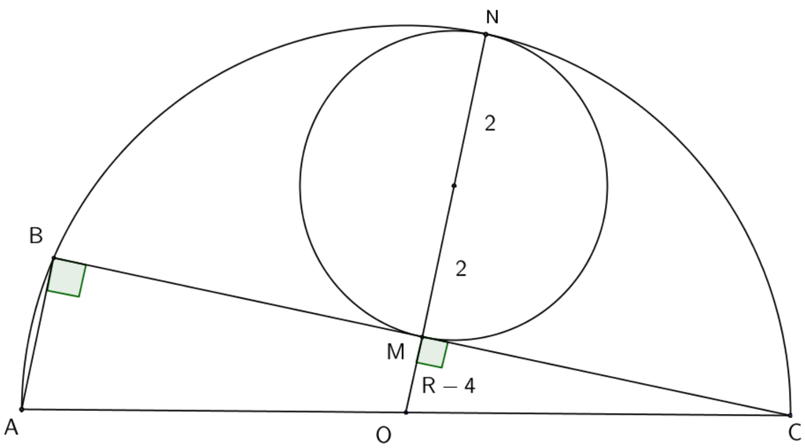
O polígono da figura é um polígono regular de 27 lados, o que é gerado por 27 pessoas. Cada pessoa olha 100 m para o lado esquerdo e para o lado direito. Este polígono, portanto, tem lado igual 200 m e perímetro igual a 5400 m. Este perímetro, por sua vez, é igual ao perímetro da circunferência de raio igual a 900 m utilizando a aproximação para π = 3 conforme o enunciado. Nesse sentido, o polígono de 27 lados pode ser considerado uma aproximação para a circunferência do enunciado. E com 27 pessoas é possível uma busca eficiente, logo a resposta mais próxima do mínimo pode ser 25 ou 29 pessoas.

$$C_{circ} = 2p_{pol}$$
$$2\pi r = n.l$$
$$n = \frac{2\pi r}{l} = \frac{2.3.900}{200} = 27$$

OBS: duplo gabarito - anular questão.

GABARITO: (B ou C)

QUESTÃO 8



A reta que liga os centros das circunferências tocará no ponto (N) de tangência entre elas e o ponto (M) de tangência entre a circunferência menor e o segmento BC. A reta MO é perpendicular ao lado BC, ou seja, será paralela a AB. Como essa reta passa pelo ponto médio de AC, temos que MO é a base média do triângulo ABC. Daí:

$$MO = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow$$
$$R - 4 = 1$$
$$R = 5$$

Logo a área do semicírculo será: $S = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = 12,5\pi$

GABARITO: (B)

QUESTÃO 9

Da expressão podemos inferir que

$$x^3+x^2+x+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+2=\left(x^3+x^{-3}\right)+\left(x^2+x^{-2}\right)+\left(x+x^{-1}\right)+2=0$$

Se $x+x^{-1}=y$, então:

$$x^2+x^{-2}=(x)^2+\left(x^{-1}\right)^2=y^2-2$$

$$x^3+x^{-3}=(x)^3+\left(x^{-1}\right)^3=y^3-3y$$

Ou seja,

$$\left(x^3+x^{-3}\right)+\left(x^2+x^{-2}\right)+\left(x+x^{-1}\right)+2=\left(y^3-3y\right)+\left(y^2-2\right)+(y)+2=0$$

$$y^3+y^2-2y=0$$

$$y.\left(y^2+y-2\right)=0 \Rightarrow y_1=0,\quad y_2=1\; e\; y_3=-2$$

Temos, então:

$$(i)x+\frac{1}{x}=0 \quad \rightarrow \quad \textit{não existe } x\in\mathbb{R}$$

$$(ii)x+\frac{1}{x}=1 \quad \rightarrow \quad \textit{não existe } x\in\mathbb{R}$$

$$(iii)x+\frac{1}{x}=-2 \quad \rightarrow \quad x^2+2x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$$

Para $x=-1$, temos que:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(-1)^2+\frac{1}{(-1)^2}=2$$

OBS: O enunciado da questão é vago na frase "Para cada valor possível de x, obtém-se o resultado da soma de x^2 com seu inverso", ou seja, podemos concluir outros gabaritos no problema:

Importante: a raiz real do problema $x=-1$ tem multiplicidade 2.

I) Resultados possíveis para $x_1=-1$ apenas:

$i)\ x^2+\frac{1}{x}=(-1)^2+\frac{1}{(-1)}=0$ (Não há este gabarito nas opções)

$ii)\ x^2+\frac{1}{x^2}=(-1)^2+\frac{1}{(-1)^2}=2$ (GABARITO D)

$II)$ Resultados possíveis para $x_1=x_2=-1$:

$i)\ x_1{}^2+\frac{1}{x_1}=x_2{}^2+\frac{1}{x_2}=(-1)^2+\frac{1}{(-1)}=0$

$x_1{}^2+\frac{1}{x_1}+x_2{}^2+\frac{1}{x_2}=0$

(Não há este gabarito nas opções)

$ii)\ x_1{}^2+\frac{1}{x_1{}^2}=x_2{}^2+\frac{1}{x_2{}^2}=(-1)^2+\frac{1}{(-1)^2}=2$

$x_1{}^2+\frac{1}{x_1{}^2}+x_2{}^2+\frac{1}{x_2{}^2}=2+2=4$

(GABARITO B)

OBS: duplo gabarito - anular questão.

GABARITO: (B ou D)

QUESTÃO 10

A menor quantidade de trocas é 6. Segue abaixo a troca:

$\begin{matrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{matrix}\Rightarrow$ trocando os pares (1,4) e (4,6), temos:

$\begin{matrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}4&6&2\\2&5&3\\3&1&9\end{matrix}\Rightarrow$ trocamos o par (2,3) e (6,9) e obtemos:

$\begin{matrix}4&9&7\\3&5&8\\2&1&6\end{matrix}$. E por fim trocando o par (8,2) e (2,7), Logo obtemos $\begin{matrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{matrix}$.

GABARITO: (B)

QUESTÃO 11

Dado o operador $\oplus$ temos:

$$\oplus(20) = 2 + 0 = 2 \equiv 200 = 2.10^2$$
$$\oplus(21) = 2 \equiv 200 = 2.10^2$$
$$\oplus(22) = 2 + 2 = 4 \equiv 40000 = 4.10^4$$
$$\oplus(23) = 2 \equiv 200 = 2.10^2$$
$$\oplus(24) = 2 + 4 = 6 \equiv 6000000 = 6.10^6$$
$$\oplus(25) = 2 \equiv 200 = 2.10^2$$
$$\oplus(26) = 2 + 6 = 8 \equiv 800000000 = 8.10^8$$
$$\oplus(27) = 2 \equiv 200 = 2.10^2$$
$$\oplus(28) = 2 + 8 = 10 \equiv 100000000000 = 10^{11}$$
$$\oplus(29) = 2 \equiv 200 = 2.10^2$$

Logo,

$$\left[\oplus(20)\right] \times \cdots \times \left[\oplus(29)\right] =$$
$$\left(2.10^2\right)\left(2.10^2\right)\left(4.10^4\right)\left(2.10^2\right)\left(6.10^6\right)\left(2.10^2\right)\left(8.10^8\right)\left(2.10^2\right)\left(10^{11}\right)\left(2.10^2\right) = 2^{12}.3.10^{41}$$

O número $2^{12}.3.10^{41}$ terminará em 41 zeros.

GABARITO: (D)

QUESTÃO 12

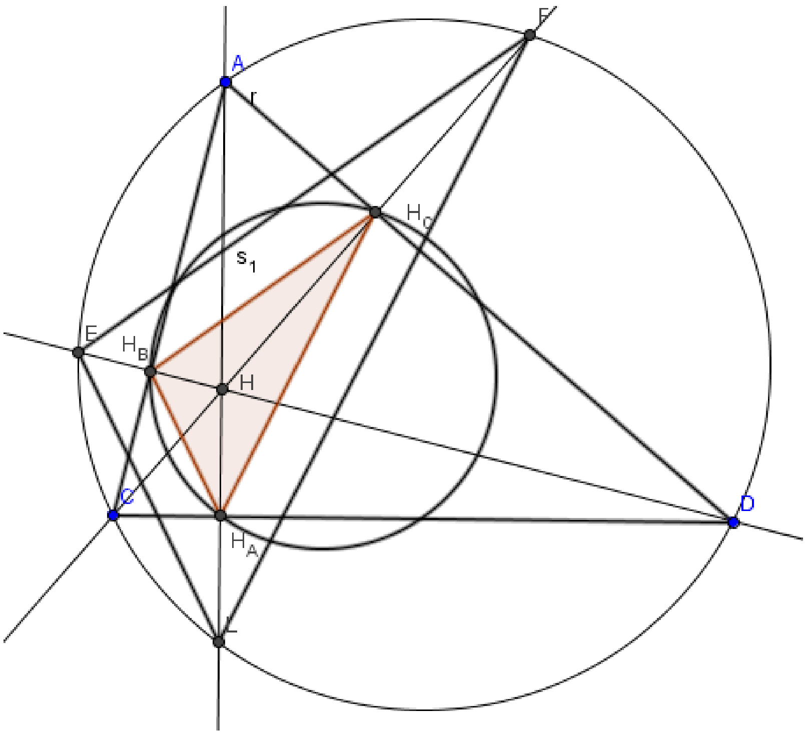
Concluímos do enunciado que:

$$70k = 7k + 32823$$
$$63k = 32823$$
$$k = 521$$
$$S(k) = 5 + 2 + 1 = 8$$

GABARITO: (A)

QUESTÃO 13

Sejam H_A, H_B e H_C os pés das alturas do triângulo ABC. Note que os simétricos do Ortocentro em relação aos lados pertencem ao círculo circunscrito, como sugere a figura. Assim temos que o triângulo formado pelos pontos ELF e pelos pés das alturas $H_A H_B H_C$ são semelhantes na razão de 2:1, pois $H_B H_A = \frac{1}{2} EL$. Assim $\frac{H_B H_A}{EL} = \frac{1}{2} = \frac{r}{R}$.



Calculando a área por Radical de Heron, temos que:

$$2p = 12 + 8 + 10 = 30 \Rightarrow p = 15$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 15\sqrt{7}.$$

Sabemos que a área pode ser calculada por:

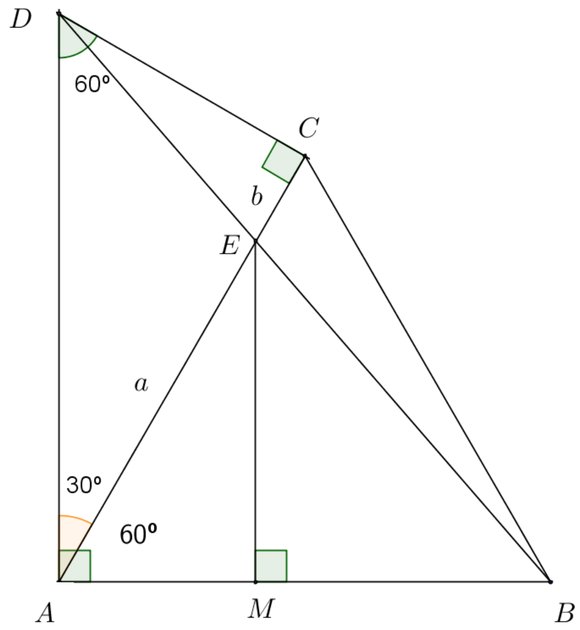
$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow 15\sqrt{7} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

Como $r = \frac{R}{2} \Rightarrow r = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

GABARITO: (C)

QUESTÃO 14

Primeiramente, a razão entre as áreas é igual a razão entre os segmentos EC e AE.



Traço a altura EM do a partir do ponto E sobre o lado AB, se chamarmos $AB = l$, $AE = a$, $EC = b$. Olhando para o triângulo AME temos:

$$AM = \frac{AE}{2} = \frac{a}{2} \text{ e } ME = AE\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

E no triângulo ACD temos:

$$AD\frac{\sqrt{3}}{2} = AC \Leftrightarrow$$
$$AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}l$$

E ainda: $MB = l - \frac{a}{2}$

Finalmente temos que a semelhança entre os triângulos EMB e ABD:

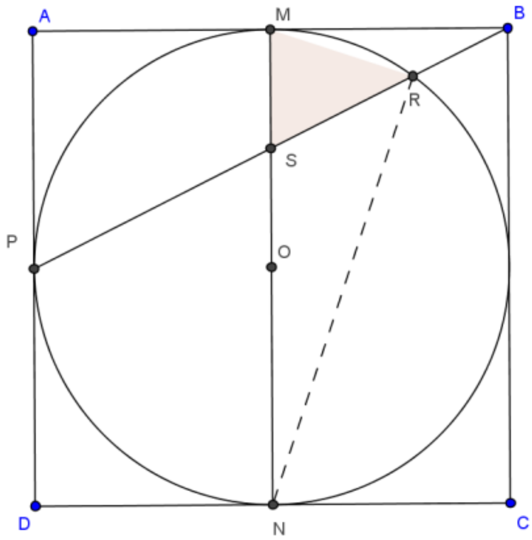
$$\frac{EM}{AD} = \frac{MB}{AB} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{2l\sqrt{3}}{3}} = \frac{l - \frac{a}{2}}{l} \Leftrightarrow \quad \frac{3a}{4} = l - \frac{a}{2} \Leftrightarrow \quad l = \frac{5a}{4} \Rightarrow a = \frac{4l}{5}$$

Como $b = l - a$, temos $b = \frac{l}{5}$

Logo a razão $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$.

GABARITO: (B)

QUESTÃO 15



Note os triângulos SMR e RSN de bases MS e SN colineares, ou seja:

$MS = \frac{a}{2}$ e $SN = \frac{3a}{2}$

Observe que o ângulo $S\hat{R}N$ mede $45^\circ = \frac{90^\circ}{2}$. Como $M\hat{R}N$ mede 90°, obtemos que $M\hat{R}S$ mede 45°, ou seja, o segmento $\overline{RS}$ é bissetriz interna no triângulo retângulo MRN.

Aplicando teorema da bissetriz interna, obtemos:

$$\frac{MS}{MR} = \frac{NS}{NR}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{NS}{NR} = \frac{1}{3} \Rightarrow NS = t \ e \ \ NR = 3t$$

Escrevendo o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(MR)^2 + (NR)^2 = (MN)^2$$
$$t^2 + (3t)^2 = (2a)^2$$

$$t^2 = \frac{2a^2}{5}$$

Observe a razão de áreas de mesma base:

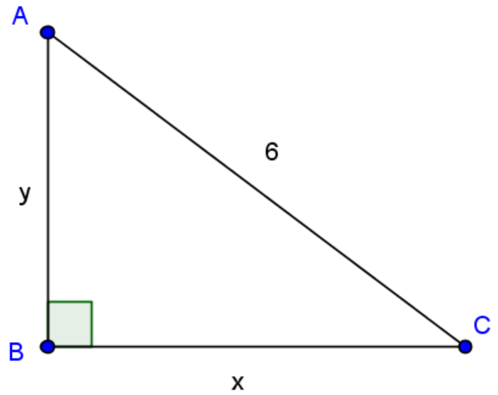
$$\frac{S_{SRM}}{S_{MRN}} = \frac{MS}{MN} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$

Logo,

$$\frac{S_{SRM}}{\left(\frac{t.3t}{2}\right)} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad S_{SRM} = \frac{3t^2}{8} = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2a^2}{5}\right) = \frac{3a^2}{20}$$

GABARITO: (A)

QUESTÃO 16



Aplicando teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos:

$$x^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

Seja S a área do triângulo ABC.

$$S = \frac{xy}{2}$$

Substituindo a expressão de y na expressão de S, teremos:

$$S = \frac{x.\sqrt{36-x^2}}{2}$$
$$S^2 = \frac{36x^2 - x^4}{4}$$

Substituindo $x^2 = k$, obtemos:

$$S^2 = \frac{36k}{4} - \frac{k^2}{4}$$
$$S^2 = -\frac{k^2}{4} + 9k$$

Determinaremos o K_v para que S^2 seja máximo:

$$K_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2.\left(\frac{-1}{4}\right)} = 18$$

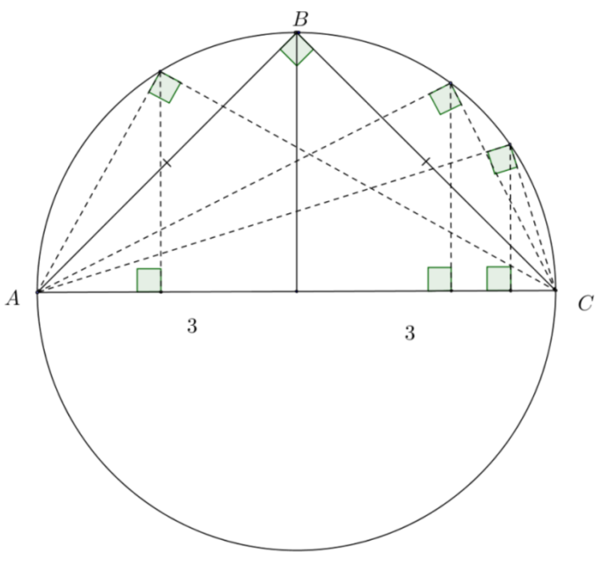
Encontramos para x e y:

$$k = 18 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$y = 3\sqrt{2}$$

Encontramos para a área máxima do triângulo ABC as medidas dos catetos $AB = AC = 3\sqrt{2}$. Como o enunciado do problema informa que os catetos têm medidas diferentes, concluímos que não podemos construir o triângulo retângulo ABC de área máxima.

OBS:



Em relação à base $\overline{AC}$, de medida fixa igual a 6, encontraremos área máxima do triângulo para a maior altura (metade da hipotenusa). O enunciado da questão, no entanto, não permite esta altura, pois os catetos seriam de medidas iguais, o que configuraria um triângulo retângulo isósceles. Nesse sentido, teríamos de posicionar o ponto B mais próximo possível da posição representada na figura acima, ou seja, não conseguiremos definir este ponto mais próximo. Não definimos, portanto, valor máximo para a área.

GABARITO: (E)

QUESTÃO 17

Para um número n natural e par, temos que os números inteiros no intervalo $\left(\frac{n}{2}, n\right]$ dois a dois não se dividem.

Sabemos que $\frac{4030}{2015} = 2$. Nesse sentido, temos que $\frac{4030}{2016} < 2$ e qualquer divisão de dois números no intervalo $\left[2016, 4030\right]$ sempre será menor que 2, ou seja, não há uma divisão de dois números no intervalo que resulte em um número inteiro maior ou igual a 2.

Nesse sentido, temos:

$$n = 4030 \quad \rightarrow \quad B = \left(\frac{4030}{2}, 4030\right]$$

$$B = \left(2015, 4030\right]$$

$$N = n(B) = 4030 - 2015$$
$$N = n(B) = 2015$$

Ou seja:

$$S\left(N\right) = 2 + 0 + 1 + 5$$
$$S\left(N\right) = 8$$

GABARITO: (A)

QUESTÃO 18

Sabemos que $N = 10^{2015} = 10^{2000}.\left(10^{15}\right)$.

Os divisores positivos de 10^{2015} que são múltiplos de 10^{2000} são dados por:

$$d\left(N_{\left(10^{2000}\right)}\right) = d\left(10^{15}\right)$$

Como $10^{15}=2^{15}.5^{15}$, então:

$$d\left(N_{\left(10^{2000}\right)}\right)=d\left(10^{15}\right)=(15+1).(15+1)=256$$

GABARITO: (D)

QUESTÃO 19

Olhemos para Contraexemplos dos itens propostos:

ITEM I e II:

$A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{5,6,7\}\rightarrow A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, ou seja:

$p=n(A)=4$ e $q=n(A)=3$

Temos:

$$N=n\left(Subconj(A\cup B)-\varnothing\right)=2^{n(A\cup B)}-1$$
$$N=n\left(Subconj(A\cup B)-\varnothing\right)=2^{7}-1=127$$

Do item I: $N=2^{p}+2^{q}-1=2^{4}+2^{3}-1=23\neq 127(F)$

Do item II: $N=2^{pq-1}=2^{3.4-1}=2^{11}=4048\neq 127(F)$

ITEM III:

$A=\{1,2,3\}$ e $B=\{2,3,4\}\rightarrow A\cup B=\{1,2,3,4\}$, ou seja:

$p=n(A)=3$ e $q=n(A)=3$

Temos:

$$N=n\left(Subconj(A\cup B)-\varnothing\right)=2^{n(A\cup B)}-1$$
$$N=n\left(Subconj(A\cup B)-\varnothing\right)=2^{4}-1=15$$

Do item III: $N=2^{p+q}-1=2^{3+4}-1=2^{7}-1=127\neq 15(F)$

ITEM IV:

$A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2,3,4\}\rightarrow A\cup B=\{1,2,3,4\}$ e $A\cap B=\{1,2,3\}$, ou seja:

$p=n(A)=3$ e $q=n(A)=4$

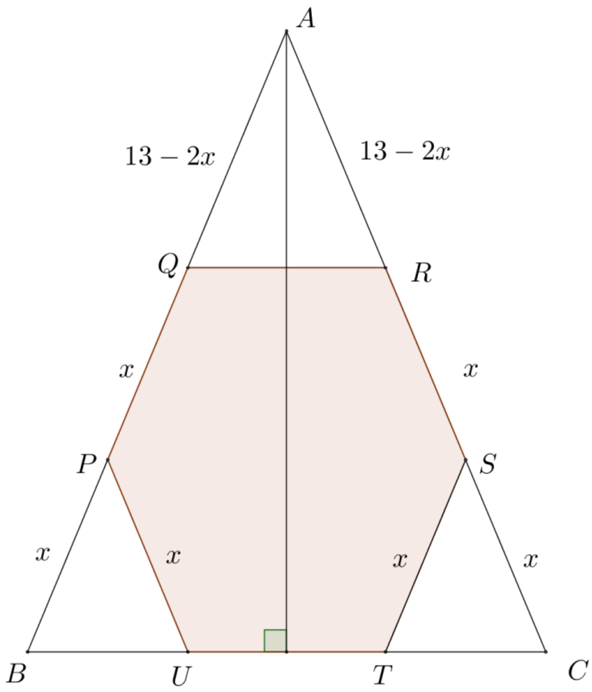
$$N = n\left(Subconj(A \cup B) - \varnothing\right) = 2^{n(A \cup B)} - 1$$
$$N = n\left(Subconj(A \cup B) - \varnothing\right) = 2^{4} - 1 = 15$$

Do item IV: $N = 2^{p} - 1 = 2^{3} - 1 = 7 \neq 15(F)$

Temos, portanto, que todas as alternativas são falsas.

GABARITO: (A)

QUESTÃO 20



Primeiramente, traçando a altura AH, temos que $HB = 5$,e , por Pitágoras em AHC temos:

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$
$$AH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Logo a área do triângulo ABC é dada por: $S_{ABC} = \dfrac{10 \cdot 12}{3} = 60$

Note que os triângulos AQR, SCT, BPU e ABC são semelhantes, logo:

$$\frac{S_{AQR}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AR}{AC}\right)^2 = \left(\frac{13-2x}{13}\right)^2 \Rightarrow S_{AQR} = \frac{60}{169}(13-2x)^2$$

$$\frac{S_{PBU}}{S_{ABC}} = \left(\frac{PB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{x}{13}\right)^2 \Rightarrow S_{PBU} = \frac{60}{169}(x)^2$$

Como $S_{PBU} = S_{SCT}$, temos que a área do hexágono será:

$$S_{Hexágono} = S_{ABC} - S_{AQR} - S_{PBU} - S_{STC}$$

$$S_{Hexágono} = 60 - \frac{60}{169}(13-2x)^2 - 2\frac{60}{169}x^2$$

$$S_{Hexágono} = \frac{60}{169}\left(169 - 169 + 52x - 6x^2\right)$$

$$S_{Hexágono} = \frac{60}{169}\cdot 52x - \frac{60}{169}\cdot 6x^2$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{60}{169}.52}{2\cdot\left(-\frac{60}{169}.6\right)} = \frac{13}{3}$$

O inteiro que mais se aproxima deste valor é $x = 4$.

GABARITO: (B)