MATEMÁTICA / FÍSICA / QUÍMICA

01	C	21	B
02	D	22	C
03	C	23	A
04	E	24	E
05	B	25	D
06	D	26	E
07	A	27	A
08	B	28	C
09	B	29	C
10	D	30	B
11	A	31	C
12	C	32	B
13	A	33	D
14	E	34	E
15	E	35	A
16	C	36	C
17	C	37	A
18	*	38	D
19	C	39	C
20	A	40	B

***ANULADA**

COMENTÁRIO DA PROVA

01. Assinale a alternativa verdadeira:

(A) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$

(B) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$

(C) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$

(D) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$

(E) $\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$

Solução:

$$\sqrt{2016} - \sqrt{2015} = \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2015}}$$

$$\sqrt{2017} - \sqrt{2016} = \frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}}$$

$$\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2016}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}} < \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2016}} < \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2015}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$$

Opção: Letra C.

---

02. O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras. Pode-se afirmar que:

(A) $0 \le k < 2$
(B) $2 \le k < 4$
(C) $4 \le k < 6$
(D) $6 \le k < 8$
(E) $k \ge 8$

Solução:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 14}{x} - 3 > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 5x - 14}{x} > 0 \\ \\ x \le 12 \end{cases}$$

	$-\infty$	-2		0		7	∞
$x^2-5x-14$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x^2-5x-14}{x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x-14}{x} < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \text{ ou } x > 7 \\ x \le 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 < x < 0 \text{ ou } 7 < x \le 12$$

$$\Rightarrow \text{Soluções inteiras} \in \{-1, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$\Rightarrow k = 6$$

Opção: Letra D.

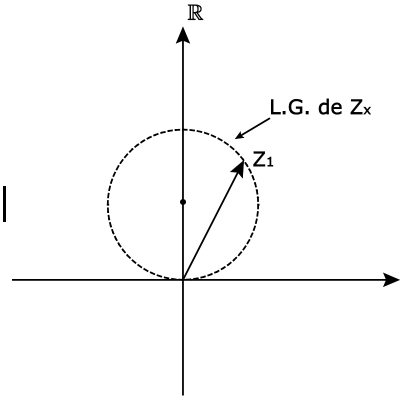
---

03. Sejam Z_1 e Z_2 números complexos tais que Z_2 é imaginário puro e $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de Z_1 e Z_2 que atendam essas condições tem-se que:

(A) $\operatorname{Im}(Z_2) > 0$
(B) $\operatorname{Im}(Z_2) \le 0$
(C) $|Z_1| \le 2|Z_2|$
(D) $\operatorname{Re}(Z_1) \ge 0$
(E) $\operatorname{Re}(Z_1) \le \operatorname{Im}(Z_2)$

Solução:

$Z_2 = ai,\ \ a \in \mathbb{R}$
$|Z_1 - ai| = |a|$
$\Rightarrow$Dist. de Z_1 até (ai) = $|a|$
$\Rightarrow$Lugar geométrico de Z_1 = Círc. de centro em ai e raio $|a|$
$\Rightarrow |Z_1|$ é uma corda de uma circunferência de diâmetro $2 \cdot |Z_2|$
$\Rightarrow |Z_1| \le 2 \cdot |Z_2|$



Opção: Letra C.

---

04. No desenvolvimento de $\left(x \cdot \text{sen}2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$ o valor do termo independente de x é igual a 63/256. Considerando que β é um número real, com 0<β<π/8 e x≠0, o valor de β é:

(A) π/9
(B) π/12
(C) π/16
(D) π/18
(E) π/24

Solução:

$$T_{p+1} = \binom{10}{P} \cdot \left(x\,\text{sen}2\,\beta\right)^{10-P} \cdot \left(\frac{1}{x}\cos 2\,\beta\right)^{P}$$

$$= \binom{10}{P} \cdot x^{10-2P} \cdot \left(\text{sen}\,2\,\beta\right)^{10-P} \cdot \left(\cos 2\,\beta\right)^{P}$$

$$10 - 2P = 0 \Rightarrow P = 5 \Rightarrow \binom{10}{5} \cdot \left(\text{sen}\,2\beta\cos\beta\right)^{5} = \frac{63}{256}$$

$$252\left(\frac{\text{sen}4\beta}{2}\right)^{5} = \frac{63}{256}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}\,4\beta}{2}\right)^{5} = \frac{1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\,4\beta}{2} = \frac{1}{2^{2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,4\beta = \frac{1}{2} \\ 0 < 4\,\beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 4\beta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{24}$$

Opção: Letra E.

---

05. Calcule o valor de $\frac{sen^4\alpha + \cos^4\alpha}{sen^6 + \cos^6\alpha}$, sabendo-se que senα · cosα = $\frac{1}{5}$.

(A) $\frac{22}{21}$

(B) $\frac{23}{22}$

(C) $\frac{25}{23}$

(D) $\frac{13}{12}$

(E) $\frac{26}{25}$

Solução:

$$\frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} = \frac{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\,(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2}{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)\cdot(\text{sen}^4\alpha - \text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)} = \frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} =$$

$$= \frac{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2)^2 - 2(\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha)^2}{(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)((\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2)}$$

Substituindo:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \wedge \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{5}$, temos:

$$\frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 - 3\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1 - \frac{2}{25}}{1 - \frac{3}{25}} = \frac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6 + \cos^6\alpha} = \frac{23}{22}$$

Opção: Letra B.

---

06. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com a $\in \Re$. Sabe-se que det(A^2–2A + I)= 16. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é*:*

0
1
2
3
4

Obs: det(X) denota o determinante da matriz X

Solução:

$\det(A-I)\ (A-\text{I}) = 16 \to \det(A-I) = \pm 4 \to \begin{vmatrix} 0 & a & -2 \\ a-2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \pm 4$

$2a + 6\ (a-2) = 4$
$\downarrow$
$8a - 12 = 4$
$\to a = 2$

ou

$2a + 6\,(a-2) = -4$
$\downarrow$
$8a - 12 = -4$
$\to a = 1$

$\to$ S = 2 + 1 = 3

Opção: Letra D.

07. Seja a equação:

$$y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 \sqrt{3y}} - 6, \quad y > 0$$

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}$

2.

3.

Solução:

$y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, \qquad y > 0$

$(y^{\log_3 3y})^{\frac{1}{2}} = y^{\log_3 3y} - 6$

$y^{\log_3 3y} = x$, substituindo temos:

$\sqrt{x} = x - 6,\ x \geq 6$

$x = (x-6)^2$

$x = x^2 - 12x + 36$

$x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = 9$

Como $x \geq 6 \Rightarrow x = 9$

$y^{\log_3 3y} = 9 \Rightarrow \log_3^{3y} = \log_y^{9}$

$\log_3^{3} + \log_3^{y} = 2\log_y^{3}$

Fazendo $\log_3^{y} = k$, temos:

$1 + k = \frac{2}{k} \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \vee k = 1$

Para $k=1$;

$\log_3^{y} = 1 \Rightarrow y = 3$

Para $k=-2$:

$\log_3^{y} = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{9}$

Produto $= 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

Opção: Letra A.

08. Seja $f(x)=\sqrt{|x-1|+|x-3+\cdots+|x-2017|}$. O valor mínimo de $f(x)$ está no intervalo:

(A) $(-\infty,\ 1008]$
(B) $(1008,\ 1009]$
(C) $(1009,\ 1010]$
(D) $(1010,\ 1011]$
(E) $(1011,\ +\infty)$

Solução:

I. Supondo $x \in\ [1008;\ 1009)$

$S(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2017|=$

$\overbrace{(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-1008)}^{1008\text{ parcelas}}+\overbrace{(-x+1009+\cdots+(-x+2017}^{1009\text{ parcelas}}=-x+k$

Logo S é decrescente

o mesmo acontece quando $x \in\ [1007;1008)$

$x \in\ [1006;1007)$

$x \in\ [1;2)$

$x \in\ (-\infty,1)$

II. Supondo $x \in [1009;1010)$

$S(x)=\overbrace{(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-1009)}^{1009\text{ parcelas}}+\overbrace{(-x+1010)+\cdots+(-x+2017)}^{1008\text{ parcelas}}=+x+c$

Logo S é crescente

O mesmo acontece quando $x \in [1010;1011)$

$x \in [1011;1012)$

$x \in\ [2016;2017)$

$x \in\ [2017;\ +\infty)$

Conclusão: *f(x)* é mínimo p/ x = 1009

Logo $f(x)_{\min}=\sqrt{(1008+1007+\cdots+1)+0+(1+2+\cdots+1008)}=$

$=\sqrt{2\cdot\dfrac{(1+1008)\cdot(1008)}{2}}=\sqrt{1009\cdot 1008}$

$\Rightarrow \sqrt{1008\cdot 1008}<f_{\min}<\sqrt{1009\cdot 1009}\Rightarrow 1008<f_{\min}<1009$

Opção: Letra B.

09. Sejam x, y e z números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ é:

(A) 210
(B) 235
(C) 250
(D) 320
(E) 325

Solução:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Seja: $S_1 = x + y + z \qquad S_2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad S_3 = x^3 + y^3 + z^3$

Sabendo que: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - (xy + xz + yz)\right)$

Tome $P_2 = xy + xz + yz \qquad P_3 = xyz$

Logo: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = \dfrac{P_2}{P_3} = \dfrac{1}{4}$;

Como: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$

$\Rightarrow 7^2 = (25) + 2P_2 \Rightarrow 49 - 25 = 2P_2 \Rightarrow P_2 = 12$

$\Rightarrow \dfrac{P_2}{P_3} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{12}{P_3} \Rightarrow P_3 = 48$

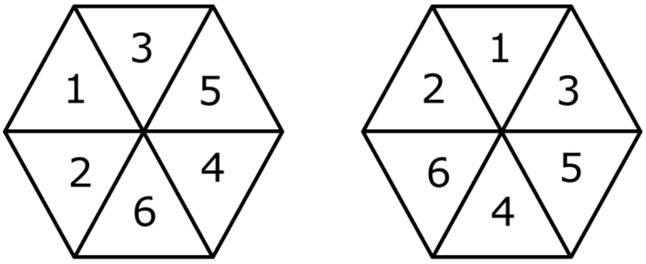
Logo, da fatoração de Gauss:

$S_3 - 3P_3 = S_1(S_2 - P_2) \Rightarrow$

$S_3 - 3 \cdot 48 = 7(25 - 12) \Rightarrow S_3 = 235$

Opção: Letra B.

10. Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.



12
24
36
48
96

Solução:
Fazendo congruência em mod 3 temos:
1 e 4 são côngruos a 1
2 e 5 são côngruos a 2
3 e 6 são côngruos a 0

I. Escolha da posição do nº 6: 6 maneiras;
II. Ao lado do nº 6 temos que ter à esquerda um côngruo a 1 e à direita um côngruo a 2 ou vice-versa: 2 maneiras;
III. Cada nº côngruo pode ser escolhido de 2 formas: $2 \cdot 2 = 4$ maneiras.

Conclusão: $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ maneiras.

Opção: Letra D.

11. Sejam uma progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) e uma progressão geométrica (b_1, b_2, b_3, b_4, ...) de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1+b_2=3$, $a_4+b_3=26$. O valor de b_1 é:

1.
2.
3.
4.
5.

Solução:
PA → (a_1, a_2, a_3, ...) ⇒ $a_n = a_1 + (n-1)r$
PG → (b_1, b_2, b_3, ...) ⇒ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$a_1 + b_2 = 3 \Rightarrow a_1 + b_1q = 3$... (1)
$a_4 + b_3 = 26 \Rightarrow (a_1 + 3r) + b_1q^2 = 26$... (2)
Subtraindo: (2) – (1): $b_1(q^2-q) + 3r = 23$

Como b_1, q, r são inteiros positivos, vamos analisar os casos:
• $r = 1 \Rightarrow b_1(q^2-q) = 20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 \Rightarrow b_1q(q-1) = 5 \cdot 4 \cdot 1$
Como $q > 2$, para existir solução, $q = 5 \Rightarrow b_1 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \Rightarrow b_1 = 1$

• $r = 2 \Rightarrow b_1(q)(q-1) = 17 \cdot 1$ como é primo não há solução.

• $r = 3 \Rightarrow b_1q(q-1) = 14 = 2 \cdot 7$, só haveria solução se $q=2$ e $b_1 = 7$, logo não há solução, pois q>2.

• $r = 4 \Rightarrow b_1q(q-1) = 11 \cdot 1$ como é primo não há solução.

• $r = 5 \Rightarrow b_1q(q-1) = 8$ só haveria solução se $q = 2$ e $b_1 = 4$, logo não há solução.

• $r = 6 \Rightarrow b_1q(q-1) = 5$ como é primo não há solução.

• $r = 7 \Rightarrow b_1q(q-1) = 2$ só haveria raiz se $q = 2$, logo não há solução.

• $r = 8$ ou mais $b_1q(q-1) < 0$, logo não há solução pois todos são inteiros positivos.

Portanto: $b_1 = 1$.

Opção: Letra A.

12. Sejam os pontos A(0,0) B(–1,1), C(1,2), D(4,1) e E($3,\frac{1}{2}$). A reta r passa por A e corta o lado CD, dividindo o pentágono ABCDE em dois polígonos de mesma área. Determine a soma das coordenadas do ponto de interseção da reta r com a reta que liga C e D.

(A) $\frac{25}{7}$

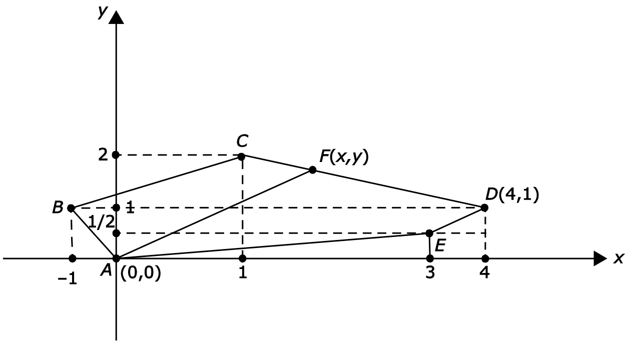
(B) $\frac{51}{14}$

(C) $\frac{26}{7}$

(D) $\frac{53}{14}$

(E) $\frac{27}{7}$

Solução:



$S_{ABCF} = S_{AFDE}$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left\|\begin{matrix}0 & -1 & 1 & x & 0\\ 0 & 1 & 2 & y & 0\end{matrix}\right\| = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left\|\begin{matrix}0 & x & 4 & 3 & 0\\ 0 & y & 1 & \frac{1}{2} & 0\end{matrix}\right\|$$

$|-2x + y - 3| = |x - 4y - 1|$, como F e 1ª quadrante.

Temos:
$-2x + y - 3 = x - 4y - 1 \Rightarrow 3x - 5y = -2.$

O ponto F pertence à reta $\overleftrightarrow{CD}$, logo:

$\overleftrightarrow{CD}: \ y = \frac{-x}{3} + \frac{7}{3} \Rightarrow 3y = -x + 7 \Rightarrow x + 3y = 7.$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{matrix}3x - 5y = -2\\ x + 3y = 7\end{matrix} \Rightarrow x = \frac{29}{14} \text{ e } y = \frac{23}{14}$$

Logo $x + y = \frac{29}{14} + \frac{23}{14} = \frac{26}{7}$

Opção: Letra C.

13. Dado um quadrado *ABCD*, de lado *a*, marcam-se os pontos *E* sobre o lado *AB*, *F* sobre o lado *BC*, *G* sobre o lado *CD* e *H* sobre o lado *AD*, de modo que os segmentos formados *AE*, *BF*, *CG* e *DH* tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$. A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos *AF*, *BG*, *CH*, e *DE* mede:

(A) $\frac{a^2}{25}$

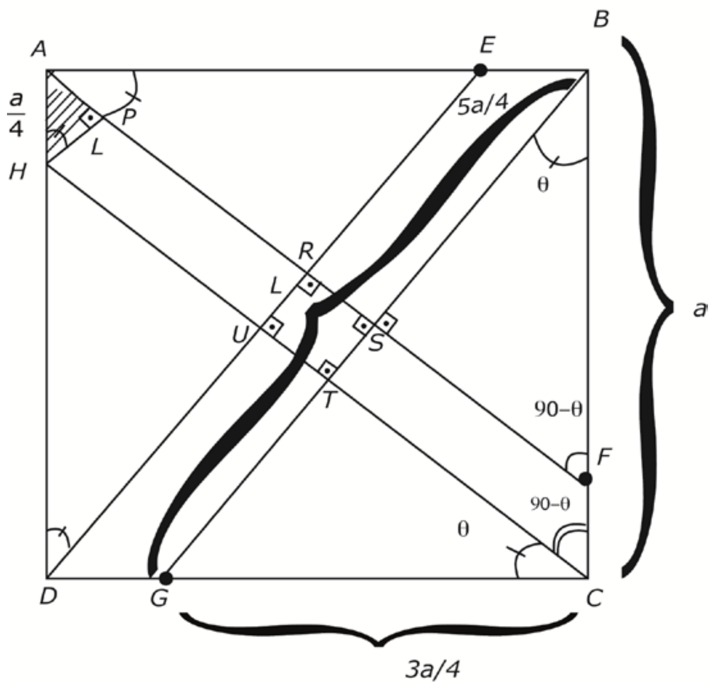
(B) $\frac{a^2}{18}$

(C) $\frac{a^2}{16}$

(D) $\frac{a^2}{9}$

(E) $\frac{2a^2}{9}$

Solução:



$$\Delta AHP \sim \Delta BGC \rightarrow \frac{L}{a} = \frac{a/4}{5a/4}$$

$$\rightarrow L = a/5$$

$$A_{RSTU} = \left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{25}$$

Opção: Letra A.

14. Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

(A) 50 cm^2

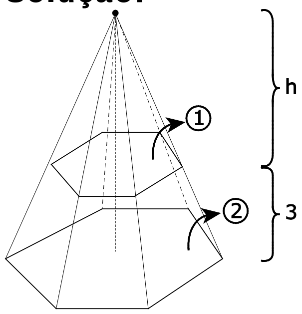
(B) $42\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$

(C) $43\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$

(D) $43\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

(E) $43\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Solução:



Seja l_1 lado do hexágono regular da parte superior (1) e l_2 o lado da parte inferior (2), logo:

$6l_1 + 6l_2 = 36 \Rightarrow l_1 + l_2 = 6$

Área d hexágono:

$$S_1 = \frac{6\sqrt{3}}{4}\, l_1^{\,2} \qquad S_2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}\, l_2^{\,2}, \text{ Logo:}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}\,(l_1^2 + l_2^2) = 30\sqrt{3} \Rightarrow l_1^2 + l_2^2 = 20, \text{ Então:}$$

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 6 \\ l_1^2 + l_1^2 = 20 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} l_2 = 6 - l_1 \Rightarrow (l_1)^2 + (6 - l_1)^2 = 20 \Rightarrow \text{Como } l_1 < l_2 \\ \Rightarrow l_1 = 2 \text{ cm};\ l_2 = 2 \text{ cm};\ l_2 = 4 \text{ cm} \end{array}$$

Volume do tronco:

$$V_t = \frac{1}{3} M_t\ (S_2 + S_1 + \sqrt{S_1 S_2})$$

$$S_1 = \frac{6\sqrt{3}}{4}\, l_1^2 = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \qquad S_2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}\, l_2^2 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$\text{Logo}: V_t = \frac{1}{3}\cdot 3\ (24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3}\cdot 24\sqrt{3}})$$

$$\Rightarrow V_t = (24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3}) = 42\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Opção: Letra E.

15. O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2. Qual é o valor de b?

(A) 11
(B) 13
(C) 17
(D) 23
(E) 29

Solução:

Seja N o nº de div. positivos de c

$P_{divc} = c^{N/2}$

$P_{divC} < c = \dfrac{c^{N/2}}{c} = c^2 \therefore c^{N/2} = c^3$ Logo N = 6

Logo C possui dividores $\Rightarrow c = p^2 q$ (p e q primos) ou $c = p^5$

1: Hip: $c = p^2q$
(a) $x_1 = pq$
$x_2 = q$
$x_3 = 1$

$S_2 = q + pq + pq^2 = 80$ (1)

Fazendo q = 2 temos $x_2 = 2$ e $x_3 = 1$ os divisores de 80; de (1): $2 + 2p + 4p = 80$
$6p = 78$
$p = 13$

Conclusão: $x_1 = 26$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$ $C = 2^2 \times 13$ nº div. posit. = 6

Logo $b = S_1 = 29$

(b) $x_1 = p^2$
$x_2 = q$ ~ existe solução com $S_2 = 80$
$x_3 = 1$

2: Hip $C = p^5$
(a) $x_1 = p^3$
$x_2 = p^2$ ~ existe solução com $S_2 = 80$
$x_3 = 1$

(b) $x_1 = p^4$
$x_2 = p$ ~ existe solução com $S_2 = 80$
$x_3 = 1$

Opção: Letra E.

Comentário de Matemática

A prova de matemática da primeira fase deste ano foi mais acessível do que a dos anos anteriores. Algumas questões clássicas tornaram bem viável para alunos que tenham feito uma preparação especial para este concurso. As questões de trigonometria, combinatória e geometria plana foram as mais fáceis da prova enquanto que as questões 11 de progressões, 8 de função modular e 15 de polinômios foram, por nós, consideradas as mais difíceis.

Equipe de Matemática

Marcelo Xavier
Ricardo Secco
André Felipe
Kessy Jhones

16. Um meteorologista mediu por duas vezes em um mesmo dia a umidade relativa do ar e a temperatura do ar quando estava em um pequeno barco a remo no meio de um grande lago. Os dados encontram-se apresentados na tabela a seguir:

Medida	Período do dia	Umidade relativa	Temperatura do ar
1	Manhã	40%	300 K
2	Tarde	70%	300 K

Diante do exposto, a razão entre as taxas de evaporação de água do lago calculadas na primeira e na segunda medida de umidade relativa do ar é:

(A) 16/13
(B) 17/14
(C) 2
(D) 7/4
(E) 4

Solução:

$$v_e = \frac{Ks(F-f)}{P}$$

$$\frac{v_{e_1}}{v_{e_2}} = \frac{100-40}{100-70} = \frac{60}{30} = 2$$

Opção: Letra C.

---

17. Um gás ideal e monoatômico contido em uma garrafa fechada com 0,1 m^3 está inicialmente a 300 K e a 100 kPa. Em seguida, esse gás é aquecido, atingindo 600 K. Nessas condições, o calor fornecido ao gás, em kJ, foi:

(A) 5
(B) 10
(C) 15
(D) 30
(E) 45

Solução:

$$\begin{cases} V_0 = 0{,}1\,m^3 \\ T_0 = 300k \;\rightarrow T = 600k \\ P_0 = 100KPa \end{cases}$$

$$Q = \Delta Li + \xi = \frac{3}{2}nR\Delta T(\xi = 0, \text{ISOVOLUMÉTRICA})$$

$$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{P_0V_0}{T_0}\cdot\Delta T$$

$$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{100\times10^3}{\cancel{300}}\times 0{,}1\times\cancel{300}$$

$$Q = \frac{3}{2}\cdot 10^4 = \frac{30.000}{2} = 15000J$$

$$Q = 15kJ$$

Opção: Letra C.

18. Uma partícula A, de carga positiva +Q, está presa a um veículo em movimento, cujas coordenadas de sua posição X_A e Y_A, em metros, estão descritas abaixo em função do tempo t, em segundos.

$$X_A(t) = 3\sqrt{2}\,t + 2\sqrt{2}$$
$$Y_A(t) = t^2 + t - 11$$

A força elétrica provocada pela interação entre a partícula A e uma partícula B, de mesma carga, fixada no ponto de coordenadas $(X_A, Y_A) = (0,1)$, será ortogonal à trajetória do veículo quando o instante $t > 0$ for igual a:

(A) 1
(B) 1/2
(C) 3/4
(D) 5/8
(E) 1/8

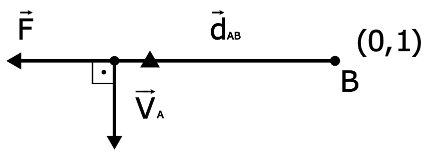
Solução:

A questão 18 deve ser anulada pois as coordenadas das partículas A e B foram de modo equivocado fixadas no mesmo ponto (X_A, Y_A). Consequentemente, a interpretação do fenômeno físico fica comprometida e fazer modificações no texto da prova, fornecido pela banca, buscando as hipóteses para o possível erro, não é parte integrante do processo de avaliação do candidato, fugindo totalmente do contexto da prova.
A solução apresentada abaixo é o que provavelmente a banca examinadora queria para ir de encontro ao gabarito divulgado. Certamente, o candidato no curso da prova não era obrigado a apresentar ou visualizar tal "solução".

A velocidade de 'A' vale:

$$V_X = 3\sqrt{2}\ m/s \ \text{ e } \ V_Y = 2t + 1\ m/s$$
$$\vec{V}_A = (3\sqrt{2}\,i) + (2t + 1j)$$

A força entre as duas cargas está na direção da reta que passa por elas.



$$\vec{d}_{AB} = (X_A - X_B)i + (Y_A - Y_B)j$$
$$\vec{d}_{AB} = 3\sqrt{2}\,t + 2\sqrt{2}\,i + t^2 + t - 12\,j$$

$$\vec{F} = \frac{K \cdot Q^2}{d^3} \cdot \vec{d}_{AB} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Para que a força seja perpendicular} \\ \text{a velocidade, } \vec{d}_{AB} \cdot \vec{V}_A = 0\end{array}\right)$$

$$\vec{V}_A \cdot \vec{d}_{AB} = 0$$

$(3\sqrt{2},\ 2t+1)\cdot(3\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2},\ t^2+t-12)=0$

$2t^3+3t^2-5t=0$

$t\,(2t^2+3t-5)=0$

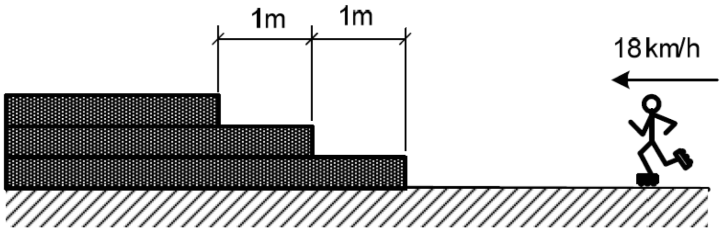
$t=0$

$\boxed{t'=12}$

$t''=\dfrac{-5}{2}$

Opção: Letra A.

19.



Um patinador em velocidade constante de 18 km/h vai ao encontro de uma escadaria, batendo palma. O som produzido pela palma é refletido horizontalmente em cada degrau de 1m de largura, fazendo com que o patinador perceba um som composto por vários tons. A menor componente de frequência da onda sonora refletida percebida com um máximo de intensidade pelo patinador, em Hz, é:

Dado:

• velocidade de propagação do som: 340 m/s.

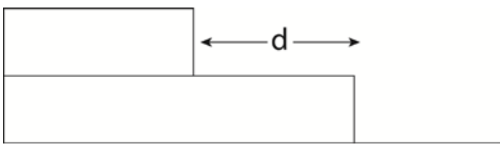
(A) 167,5
(B) 170,0
(C) 172,5
(D) 340,0
(E) 345,0

Solução:

• Calculando a frequência mínima para a interferência construtiva

$\Delta d = n\dfrac{1}{2}$(em fase) e $1 = \dfrac{v}{f} \Rightarrow \Delta d = \dfrac{n\cdot v}{2f} \Rightarrow f = \dfrac{n\cdot v}{2\cdot\Delta d}$.

• Para a menor interferência construtiva $\Rightarrow n = 2$.

• 

$\Delta d = 2d = 2{,}0$ m

$f = \dfrac{2.340}{2\cdot 2} \Rightarrow f = 170$ Hz.

Porém, a frequência percebida pelo observador sofre efeito Doppler; devido à aproximação do observador, então:

$$f = f\,\frac{340+5}{340} = 170\,\frac{345}{340} \Rightarrow f = 172{,}5\ \text{Hz}.$$

Opção: Letra C.

---

20. Um corpo preso a uma corda elástica é abandonado em queda livre do topo de um edifício, conforme apresentado na figura acima. Ao atingir o solo, penetra numa distância x abaixo do nível do solo até atingir o repouso. Diante do exposto, a força de resistência média que o solo exerce sobre o corpo é:

Dados:

- aceleração gravitacional: g;
- constante elástica da corda: k;
- massa do corpo: M;
- altura do edifício em relação ao solo: H;
- comprimento da corda: L;
- distância que o corpo penetra no solo até atingir o repouso: x.

Observação:
- a corda elástica relaxada apresenta comprimento menor que a altura do edifício.

(A) $Mg + \dfrac{MgH + k(HL + Lx - Hx)}{x} - k\,\dfrac{H^2 + x^2 + L^2}{2x}$

(B) $Mg + \dfrac{MgH + k(HL - Lx - Hx)}{2x} - k\,\dfrac{H^2 + x^2 + L^2}{x}$

(C) $Mg + \dfrac{MgH - k(HL - Lx - Hx)}{x} + k\,\dfrac{H^2 + x^2 + L^2}{2x}$

(D) $Mg - \dfrac{MgH - k(HL - Lx - Hx)}{x} + k\,\dfrac{H^2 + x^2 + L^2}{2x}$

(E) $Mg + \dfrac{MgH - k(HL + Lx - Hx)}{x} + k\,\dfrac{H^2 + x^2 + L^2}{2x}$

Solução:

$w_p \rightarrow$ trabalho da força peso

$w_N \rightarrow$ trabalho da força de resistência

$w_{FEL} \rightarrow$ trabalho da força alástica.

$$Mg(H + x) - N \cdot x = \frac{k(H + x - L)^2}{2}$$

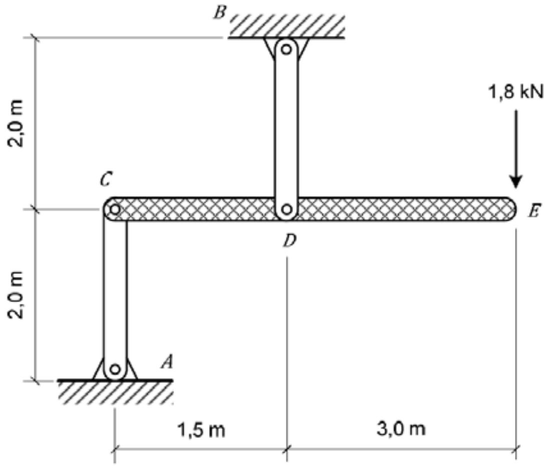
$$Nx = MgH + Mgx - \frac{k}{2}\left[H^2 + 2Hx + x^2 - \left(2HL + 2xL\right) + L^2\right]$$

$$N = Mg + \frac{MgH}{x} + \frac{k(HL + Lx - Hx)}{x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$$

$$N = Mg + \frac{MgH + k\left(HL + Lx - Hx\right)}{x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2}{2x}$$

Opção: Letra A.

21.



A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra horizontal *CE* e duas barras verticais rotuladas *AC* e *BD*. Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e as barras *AC* e *BD* têm peso desprezível, enquanto a barra *CE* tem densidade linear de massa μ. Na extremidade da barra *CE*, há uma carga concentrada vertical, de cima para baixo, de 1,8 kN. Para que a força de tração na barra *BD* seja 8,1 kN, a densidade linear de massa μ da barra *CE*, em kg/m, e a força em módulo na barra *AC*, em kN, devem ser iguais a:

Dado:

- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.

(A) 40 e 3,6
(B) 40 e 4,5
(C) 60 e 3,6
(D) 400 e 4,5
(E) 600 e 3,5

Solução:

$$M_C \Rightarrow 8,1 \times 1,5 = 1,8 \times 4,5 + P \times \frac{4,5}{2}$$

$$8,1 \times 0,5 = P \times \frac{4,5}{2} \therefore P = 1,8\,kN$$

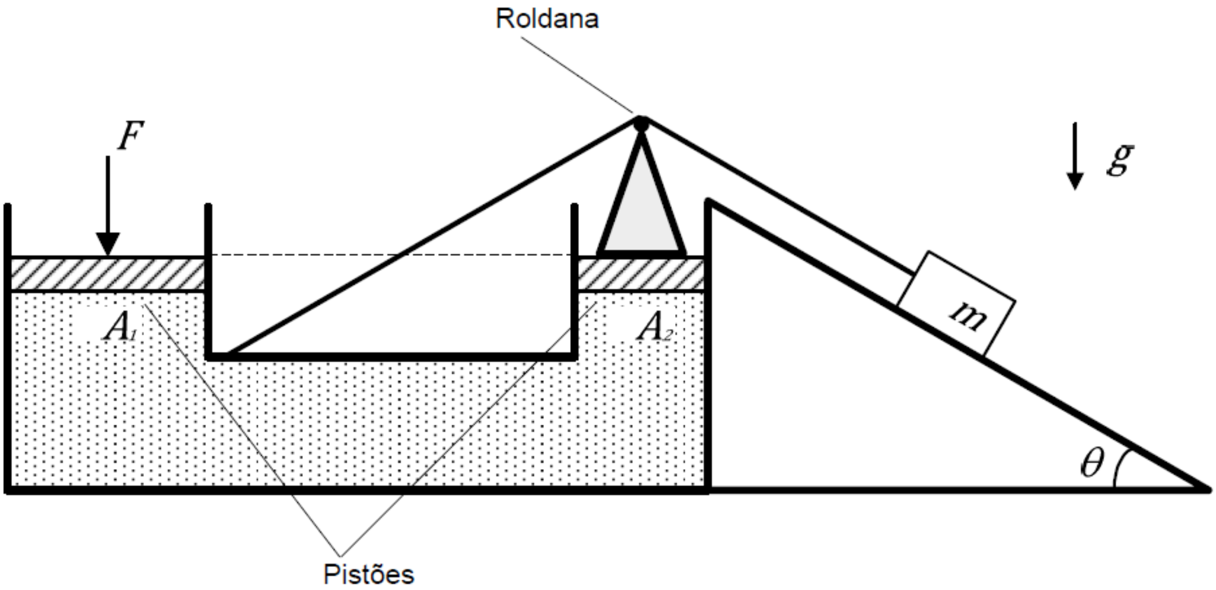
$$\mu = \frac{\frac{1,8 \times 10^3}{10}}{4,5} = 40\ kg/m$$

$$M_D \Rightarrow F \times 1,5 = 1,8 \times 0,75$$

$$F = 1,8(2 + 0,5) = 4,5\,kN$$

Opção: Letra B.

22.



A figura acima apresenta um bloco preso a um cabo inextensível e apoiado em um plano inclinado. O cabo passa por uma roldana de dimensões desprezíveis, tendo sua outra extremidade presa à estrutura de um sistema de vasos comunicantes. Os vasos estão preenchidos com um líquido e fechados por dois pistões de massas desprezíveis e equilibrados à mesma altura. O sistema é montado de forma que a força de tração no cabo seja paralela ao plano inclinado e que não haja esforço de flexão na haste que prende a roldana. A expressão da força ***F*** que mantém o sistema em equilíbrio, em função dos dados a seguir, é:

Dados:
- Aceleração da gravidade: g ;
- Massa do corpo: m ;
- Inclinação do plano de apoio: θ ;
- Áreas dos pistões: $A1$ e $A2$.

(A) $\frac{A_1}{A_2} m\, g sen^2\,(\theta)$

(B) $\frac{A_1}{A_2} mgcos^2\,(\theta)$

(C) $2\frac{A_1}{A_2} mgsen^2\,(\theta)$

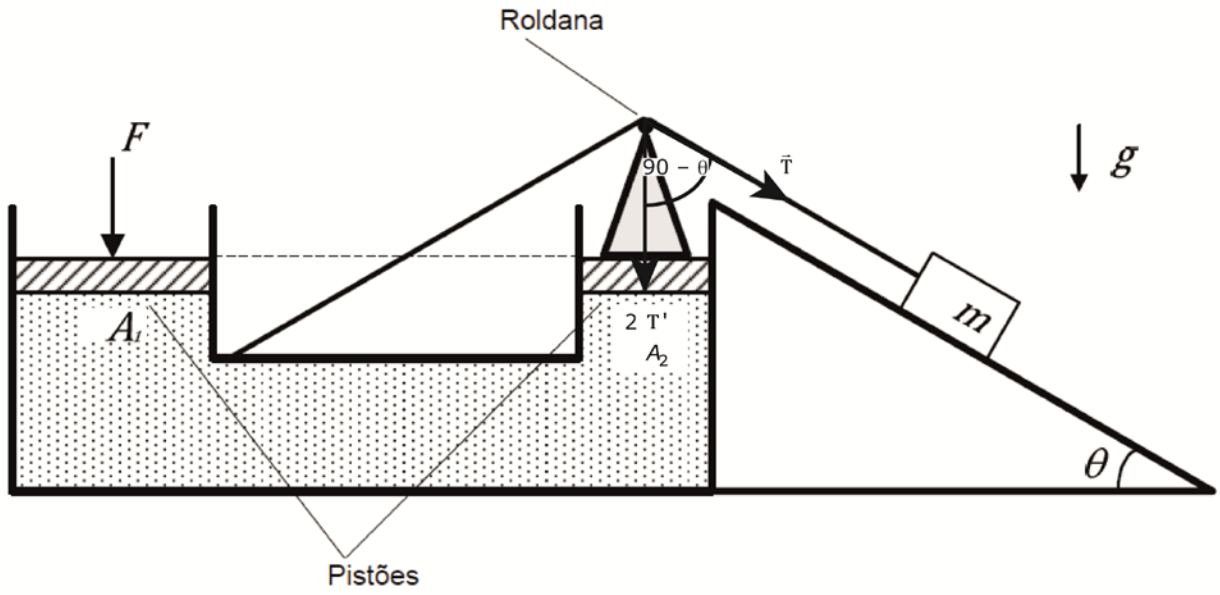
(D) $2\frac{A_1}{A_2} mgcos^2\,(\theta)$

(E) $\frac{A_1}{A_2} mgsen^2\,(2\theta)$

Solução:

$\dfrac{F}{A_1} = \dfrac{F'}{A_2}$ $\quad T = m\,g\,sen\theta \quad T' = T cos\,(90 - \theta)$

$F' = 2T' \therefore \quad F = \dfrac{A_1}{A_2} \cdot 2\,T\cos\,(90 - \theta) = \dfrac{A_1}{A_2} \cdot 2 \cdot m\,g\,sen^2\,\theta$



Opção: Letra C.

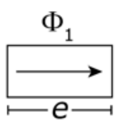
---

23. Deseja-se minimizar a taxa de transferência de calor em uma parede feita de um determinado material, de espessura conhecida, submetendo-a a um diferencial de temperatura. Isso é feito adicionando-se uma camada isolante refratária de 15% da espessura da parede, de forma que cuidadosas medidas experimentais indicam que a taxa de transferência de calor passa a ser 40% em relação à situação original. Supondo que o diferencial de temperatura entre as extremidades livres da parede original e da parede composta seja o mesmo, pode-se afirmar que a condutividade térmica do material refratário é numericamente igual a

(A) 10 % da condutividade térmica do material da parede.
(B) 15 % da condutividade térmica do material da parede.
(C) 4,5 % da condutividade térmica do material da parede.
(D) 22,22 % da condutividade térmica do material da parede.
(E) 33,33 % da condutividade térmica do material da parede.

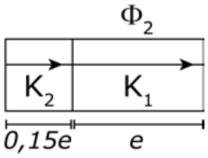
Solução:

- Fórmula de Fourier para o fluxo térmico: $\Phi = \dfrac{K \cdot A \cdot \Delta T}{e}$
- Resistência térmica $\Rightarrow R_T = \dfrac{e}{K \cdot A}$
- Condição inicial:



$\Phi = \dfrac{K_1 \cdot A \cdot \Delta T}{e}$

- Condição final:



$\Phi_2 = 0{,}4\Phi_1$

Como os materiais formam um circuito térmico em série, temos que:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = \left(\frac{e}{K_1 \cdot A} + \frac{0{,}15e}{K_2 \cdot A}\right)$$

$$\Phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \Rightarrow \frac{\cancel{A} \cdot \cancel{\Delta T}}{\frac{\cancel{e}}{K_1} + \frac{0{,}15\cancel{e}}{K_2}} = 0{,}4\frac{K_1 \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{\Delta T}}{\cancel{e}} \Rightarrow K_2 = 0{,}4K_2 + 0{,}06K_1$$

$$K_2 = 0{,}1K_1$$

$$\boxed{K_2 = 10\%K_1}$$

Opção: Letra A.

---

24. Uma corda mista sobre o eixo horizontal tem uma densidade linear para a coordenada $x < 0$ e outra para $x \geq 0$. Uma onda harmônica, dada por $A\text{sen}(\omega t - k_1 x)$, onde t é o instante de tempo, propaga-se na transmitida são dadas por $B\text{sen}(\omega t + k_1 x)$ e $C\text{sen}(\omega t - k_2 x)$, respectivamente, onde ω, k_1 e k_2 são constantes, então a razão entre as amplitudes da onda refletida e da incidente, dada por $\left|B/A\right|$, é igual a:

<u>Observação</u>:

- considere $\dfrac{\text{sen}(ax)}{x} = a$, para $|x|$ próximo a zero.

(A) $\left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + 2k_2}\right|$

(B) $\left|\dfrac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2}\right|$

(C) $\left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1}\right|$

(D) $\left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_2}\right|$

(E) $\left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|$

Solução:

As amplitudes refletida e transmitida podem ser encontradas em função das velocidades de propagação nos dois meios:

$$A_R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} A_I \quad \text{e} \quad A_T = \frac{2v_1}{v_1 + v_2} A_I$$

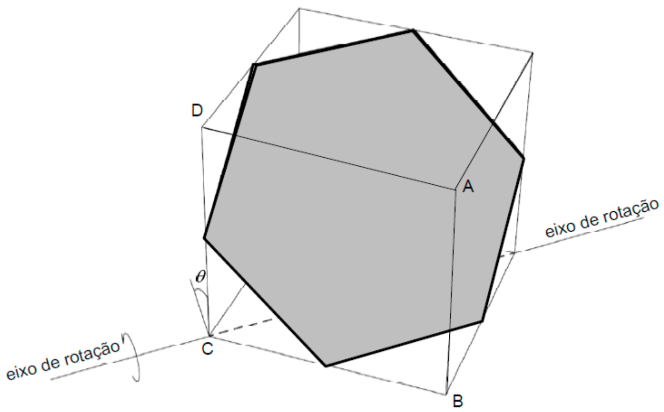
Podemos encontrar essas velocidades pela relação: $v = \dfrac{\omega}{k}$

Foi pedida a razão entre as amplitudes refletida e incidente, então:

$$\left|\frac{A_R}{A_I}\right| = \left|\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right| = \left|\frac{\dfrac{\omega}{k_2} - \dfrac{\omega}{k_1}}{\dfrac{\omega}{k_2} + \dfrac{\omega}{k_1}}\right| = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|.$$

Opção: Letra E.

25.



A figura acima apresenta uma placa fotovoltaica em forma de hexágono sustentada por uma estrutura em forma de cubo, que pode girar em torno do eixo de rotação assinalado. Esta placa tem a capacidade máxima de 100 W de potência e sua tensão de saída é constante em 10 V. A potência máxima é atingida quando a radiação solar incide na placa perpendicularmente. Sabe-se que a radiação incide perpendicularmente à aresta $\overline{AB}$ e ao eixo de rotação (θ = 0 na figura). A maior inclinação θ que a estrutura cúbica pode sofrer, diminuindo a potência fornecida pela placa, e ainda assim permitindo que a mesma alimente um resistor de 2,5 Ω, é:

(A) asen(0,4) – asen($\frac{\sqrt{3}}{2}$)

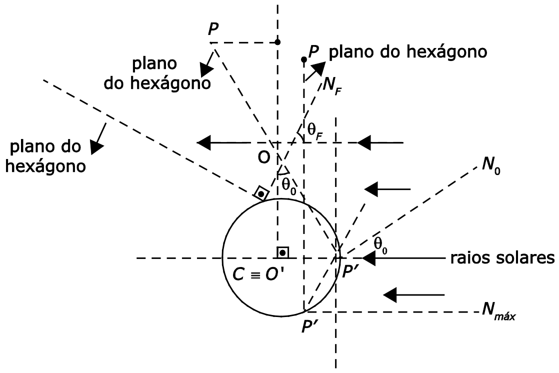
(B) acos(0,4) – acos($\frac{\sqrt{3}}{2}$)

(C) acos(0,4) – acos($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

(D) acos(0,4) – asen($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

(E) asen(0,4) – acos($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

Solução:



A potência é proporcional ao fluxo solar, como a área do hexágono é constante, podemos escrever:

$P = P_{máx} \cdot \cos\theta \Rightarrow \dfrac{V^2}{R} = Pmáx \cdot \cos\theta$; na situação final:

$\dfrac{10^2}{2,5} = 100 \cdot \cos\theta_F \Rightarrow \cos\theta_F = 0,4$; então: $\theta_F = \text{arccos } 0,4$

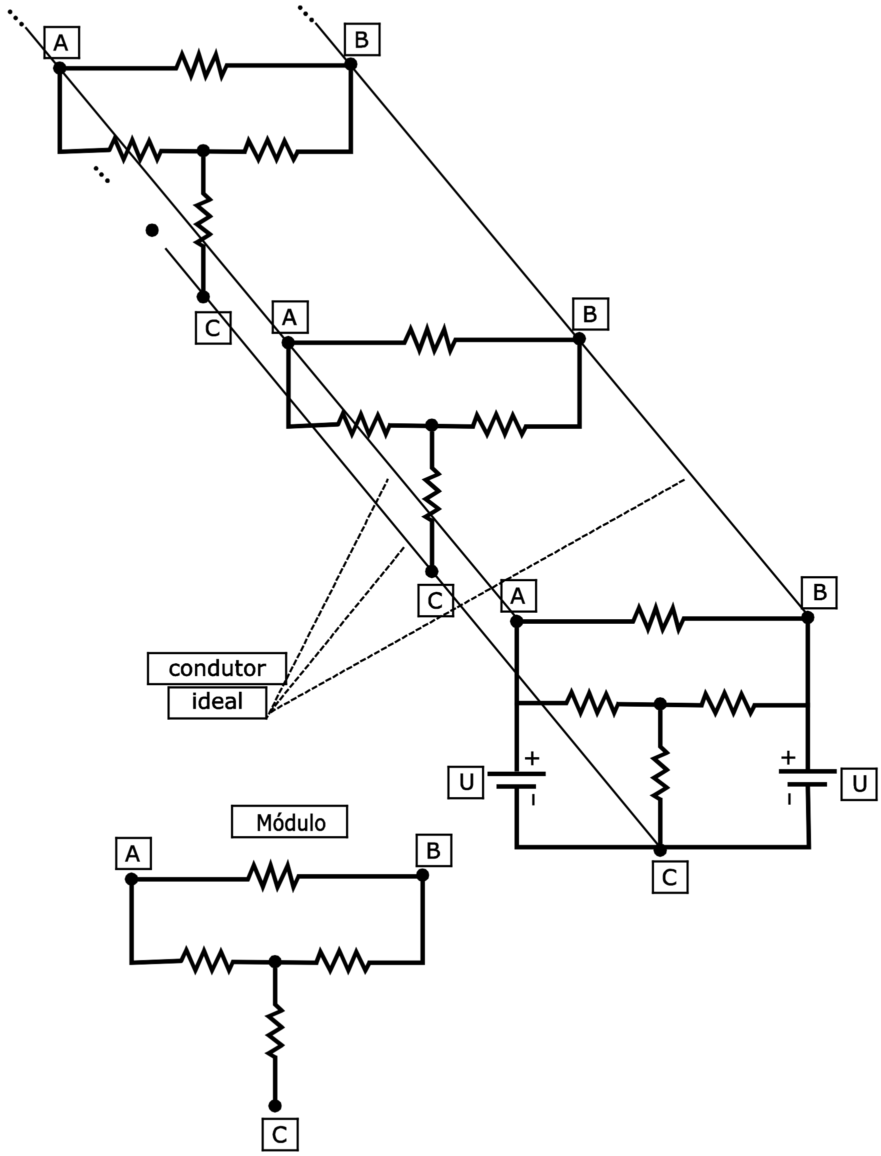
Inicialmente: $\overline{OP'}^2 = \overline{O'P'}^2 + \overline{OO'}^2 \therefore \overline{OP'}^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \therefore \overline{OP'} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Então: sen θ_0 = $\dfrac{a\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{a\dfrac{\sqrt{6}}{4}} \therefore \text{sen } \theta_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, então: $\theta_0 = \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Delta\varphi = \theta_F - \theta_0 \therefore \Delta\varphi = \text{arccos } 0,4 - \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Opção: Letra D.

26.



A figura acima apresenta um arranjo de resistores composto por N módulos formados por resistores iguais a R. Esses módulos possuem os nós A, B e C, sendo que todos os nós A são conectados entre si por meio de condutores ideais, conforme apresentado na figura, o mesmo acontecendo com os nós B entre si. No primeiro módulo, existem duas baterias com ddp iguais a U. A relação numérica $\frac{U^2}{R}$ para que a potência total dissipada pelo arranjo seja igual a N watts é:

(A) $\frac{1}{3}$

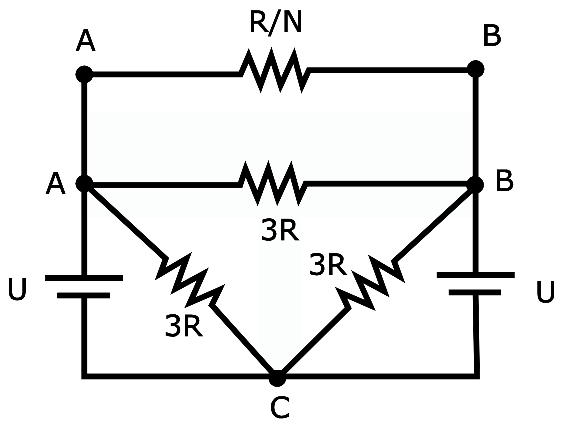
(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$

(E) $\frac{3}{2}$

Solução:
Fazendo a transformação $Y - \Delta$.



Como a D.D.P entre A e B é nula:

$$P_{Total} = \frac{U^2}{3\,R/N} + \frac{U^2}{3\,R/N} = N$$

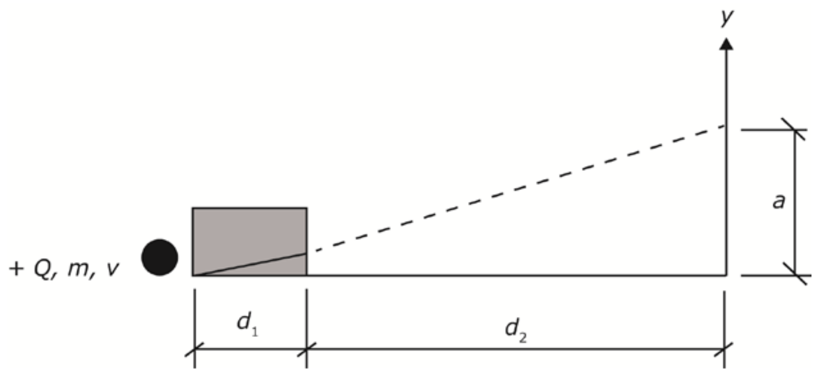
$$P_{Total} = \frac{U^2 \cdot N}{3R} + \frac{U^2 \cdot N}{3R} = N$$

$$\frac{U^2}{R} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{U^2}{R} = \frac{3}{2}$$

Opção: Letra E.

27.



Uma partícula de carga positiva $+Q$ penetra numa região de comprimento d_1 sujeita a um campo magnético de baixa intensidade e ortogonal ao plano da figura acima. Em seguida, penetra numa região de comprimento d_2, onde não existe campo magnético. Ao longo das regiões de comprimento d_1 e d_2, a partícula percorre a trajetória indicada pela linha tracejada da figura acima. Dadas as informações a seguir, a distância *a*, indicada na figura entre a origem e o ponto de passagem da partícula pelo eixo *Y*, é aproximadamente:

Dados:

• velocidade inicial da partícula: ortogonal ao eixo *Y* e de módulo *v*;
• módulo do campo magnético da região: *B*;
• distância entre o fim da região do campo magnético e o eixo *Y;* d_2;
• massa da partícula: m;
• $d_2 \gg d_1$;
• deslocamento vertical da partícula dentro da região magnetizada << d_1.

(A) $\frac{d_1 d_2 QB}{mv}$

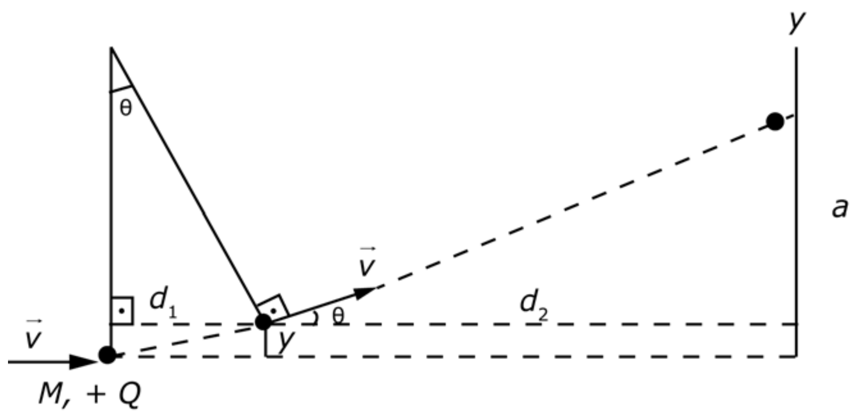
(B) $\frac{d_2 mv}{QBd_1}$

(C) $\frac{2d_1 d_2 QB}{mv}$

(D) $\frac{d_2 mv}{2QBd_1}$

(E) $\frac{d_1 d_2 QB}{2mv}$

Solução:



Como y << d_1, temos:

$sen\ \theta \approx tg\ \theta$

$\frac{d_1}{R} = \frac{a}{d_2}$; como: $R = \frac{M \cdot V}{Q \cdot B}$

$a = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot q \cdot B}{M \cdot V}$

Opção: Letra A.

28. Uma mancha de óleo em forma circular, de raio inicial r_0, flutua em um lago profundo com água cujo índice de refração é n. Considere que a luz que atinge a mancha e a superfície da água seja difusa e que o raio da mancha cresça com a aceleração constante a. Partindo do repouso em $t = 0$, o volume de água abaixo da mancha que não recebe luz, após um intervalo de tempo t, é:

(A) $\dfrac{\pi r_0}{3\tan(\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right))}\left[\dfrac{1}{2}\text{at}^2 + r_0\right]^2$

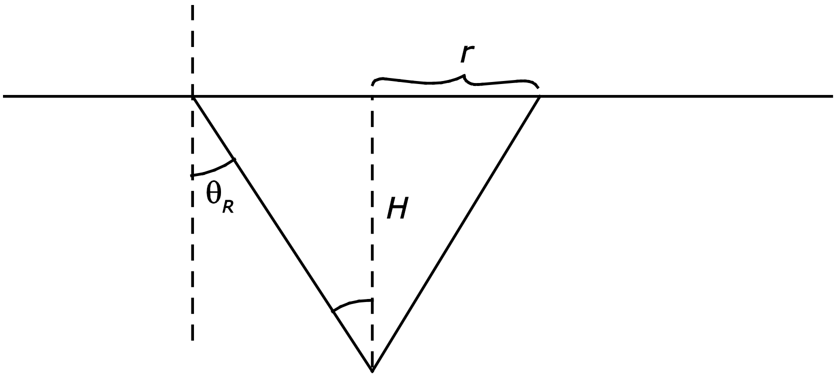
(B) $\dfrac{\pi}{2\tan(\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right))}\left[\dfrac{1}{2}\text{at}^2 + r_0\right]^3$

(C) $\dfrac{\pi}{3\tan(\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right))}\left[\dfrac{1}{2}\text{at}^2 + r_0\right]^3$

(D) $\dfrac{\pi r_0}{3\tan(\text{sen}^{-1}(n))}\left[\dfrac{1}{2}\text{at}^2 + r_0\right]^2$

(E) $\dfrac{\pi r_0^{\ 2}}{3\tan(\text{sen}^{-1}(n))}\left[\dfrac{1}{2}\text{at}^2 + r_0\right]$

Solução: Reflexão total: $\text{sen}\theta_R = \dfrac{1}{n}$



V será o volume de um cone de raio $r = r_0 + \dfrac{1}{2}at^2$ e altura $H = \dfrac{r}{\text{tg}\theta}$:

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{r^3}{\text{tg}\theta} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\text{tg}(\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right))}(r_0 + \frac{1}{2}at^2)^3$$

Opção: Letra C.

---

29. Um projétil é lançado obliquamente de um canhão, atingindo um alcance igual a 1000 m no plano horizontal que contém a boca do canhão. Nesse canhão, o projétil parte do repouso executando um movimento uniformemente variado dentro do tubo até sair pela boca do canhão. Ademais, a medida que o projétil se desloca no interior do tubo, ele executa um movimento uniformemente variado de rotação, coaxial ao tubo. Tendo sido o projétil rotacionado de 1 rad durante seu deslocamento dentro do canhão, sua aceleração angular, em rad/s^2, ao deixar o canhão é:

Dados:

- ângulo do tubo do canhão em relação à horizontal: 45º;
- comprimento do tubo: 2 m;
- aceleração da gravidade: C = 10 m/s^2.

Consideração:

- despreze a resistência do ar.

(A) 12,5
(B) 25
(C) 1250
(D) 2500
(E) 500

Solução:

$$A_{máx} = \frac{v_0^2}{g} \qquad 10000 = v_0^2 \;\therefore\; v_0 = 100\ m/s$$

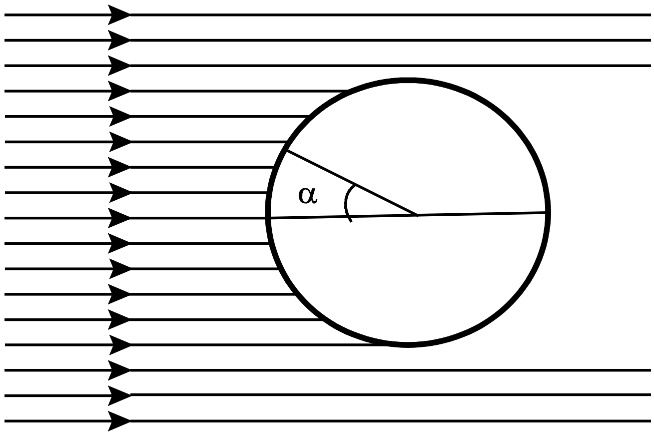
$$\Delta S = \bar{v}\Delta t \qquad 2 = \frac{100}{2}\Delta t \;\therefore\; \Delta t = \frac{1}{25}$$

$$\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{\varphi \Delta t^2}{2}$$

$$1 = 0 + \frac{\varphi}{2} \times \frac{1}{625} \qquad \varphi = 1250\ rad/s^2$$

Opção: Letra C.

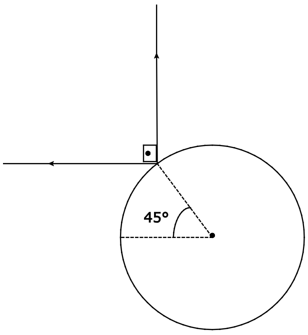
30.



Considere um feixe homogêneo de pequenos projéteis deslocando-se na mesma direção e na mesma velocidade constante até atingir a superfície de uma esfera que está sempre em repouso.
A esfera pode ter um ou dois tipos de superfícies: uma superfície totalmente refletora (colisão perfeitamente elástica entre a esfera e o projétil) e/ou uma superfície totalmente absorvedora (colisão perfeitamente inelástica entre a esfera e o projétil).
Em uma das superfícies (refletora ou absorvedora), o ângulo α da figura pertence ao intervalo $[0,\beta]$, enquanto na outra superfície (absorvedora ou refletora) α pertence ao intervalo $(\beta, \pi/2]$.
Para que a força aplicada pelos projéteis sobre a esfera seja máxima, o(s) tipo(s) de superfície(s) é(são):

(A) refletora em $[0,\pi/3]$ e absorvedora em $(\pi/3, \pi/2]$.
(B) refletora em $[0,\pi/4]$ e absorvedora em $(\pi/4, \pi/2]$.
(C) absorvedora em $[0,\pi/6]$ e refletora em $(\pi/6, \pi/2]$.
(D) absorvedora em $[0,\pi/4]$ e refletora em $(\pi/4, \pi/2]$.
(E) Absorvedora em $[0,\pi/2]$.

Solução:



Para $\alpha < 45°$, a componente horizontal do projétil refletido, no caso de colisão elástica, tem seu sentido invertido.
Para $\alpha > 45°$, a componente horizontal mantém o sentido inicial. Nesse caso, a quantidade de movimento transmitido à esfera será maior se a colisão for plástica (totalmente inelástica).

Opção: Letra B.

Comentário de Física

A prova de Física não pode ser avaliada separadamente, tendo em vista o tempo de prova com 40 questões, as dificuldades em algumas questões de Física, ficavam mais evidentes. A avaliação do fenômeno físico passa por etapas complexas como a interpretação, conceituação e inserir um modelo matemático, nem sempre de fácil observação. As questões anuladas causam na totalidade da prova, uma diminuição do rendimento do candidato. A primeira fase do vestibular do IME, tem apresentado um grau de dificuldade muito alto, que associado a nota mínima para a aprovação à segunda fase do vestibular, transforma por vezes, uma das disciplinas na responsável pela eliminação do candidato. Nos últimos 3 anos a Física tem sido a preferida da banca para alcançar tal objetivo.

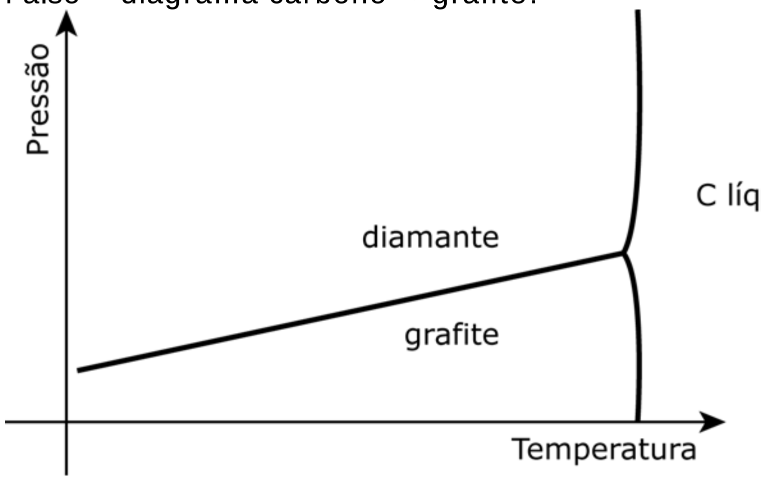
Equipe de Física

Maurício
Noronha
Ricardo Luiz
Edward
Bruno José

31. Para o grafite, ρ = 2250 kg/m³, H^0 = 0 e S^0 = 5,7 · 10^{-3} kJ/(mol.K). Para o diamante, ρ = 3500 kg/m³, H^0 ≠ 0 e S^0 = 2,4 · 10^{-3} kJ/(mol.K). Na conversão do grafite em diamante, ΔG^0 = 2900 kJ/mol. Com base nestas informações, é correto afirmar que:

(A) grafite e diamante são exemplos de carbono puro, mas não são formas alotrópicas de um mesmo elemento.
(B) em altas pressões, o diamante é menos estável que o grafite.
(C) o diamante pode se transformar, de forma espontânea, em grafite.
(D) a conversão do grafite em diamante é exotérmica.
(E) altas pressões favorecem a formação de grafite.

Solução:
(A) Falso – são formas alotrópicas do mesmo composto.
(B) Falso – diagrama carbono × grafite:



O diagrama mostra que o aumento da pressão favorece a formação do diamante.
(C) Verdadeiro:
Como $\Delta G°$ = 2900 KS/mol > 0 ⇒
formação do grafite em diamente não é espontânea
logo a reação oposta é favorecida, para condições ambiente logo é possível a transformação espontânea de diamante em grafite.
(D) Falso:
$\Delta G° = \Delta H° - T\Delta S°$
a298k: $\Delta S° = (2,4 - 5,7)10^{-3} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ KJ/K
$\Delta G°$ = 2900 kJ/mol
⇒ $\Delta H° > 0$ ⇒ endotérmico
(E) Do gráfico, do gráfico altas pressões favorecem a formação de diamante.

Opção: Letra C.

32. No esboço da Tabela Periódica abaixo estão discriminados os números de nêutrons dos isótopos mais estáveis de alguns elementos.

1																	18
0	12											13	14	15	16	17	He
4	5											6	6	7	8	10	Ne
12	12	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	14	16	16	18	Ar
20	20	24	26	28	28	30	30	32	30	34	34	38	42	42	46	44	Kr
48	50	50	50	52	56	55	58	58	60	60	66	66	70	70	78	74	Xe
																	Rd

Considere agora um composto iônico binário, em que:

(I) o cátion, de carga +2, possui 12 prótons;
(II) o ânion, de carga –3, possui 10 elétrons.

A massa de 1 mol deste composto é aproximadamente igual a:

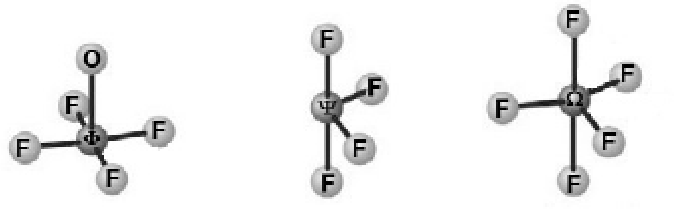
(A) 38 g
(B) 100 g
(C) 122 g
(D) 90 g
(E) 50 g

Solução:

Cátion de carga +2 com 12 prótons é o magnésio, que segundo a tabela tem 12 nêutrons: ${}^{24}_{12}Mg$.
Ânion de carga –3, com 10 elétrons é o nitrogênio, que tem 7 prótons, que segundo a tabela tem 7 nêutrons: ${}^{14}_{7}N$.
Como a fórmula do composto iônico é Mg_3N_2: $3 \times 24 + 2 \times 14 = 72 + 28 = 100$ g/mol.

Opção: Letra B.

33. As moléculas ΦOF4, ΨF4 e ΩF5 apresentam, respectivamente, formas geométricas que se aproximam das figuras (1), (2) e (3), mostradas a seguir, no modelo de bola e palito:



(1) (2) (3)

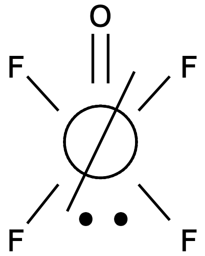
Sabendo-se que "Φ", "Ψ" e "Ω" representam elementos da tabela periódica, assinale a alternativa correta que indica, na sequência, as possíveis identidades destes elementos:

(A) Br, Te, Sb
(B) As, Sn, Sb
(C) Se, Sb, Cl
(D) Xe, S, P
(E) Bi, Pb As

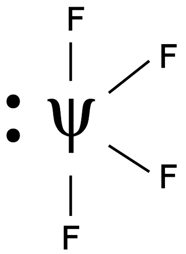
Parte da Tabela Periódica

3A 13	4A 14	5A 15	6A 16	7A 17	8A 18
					2 He
5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn

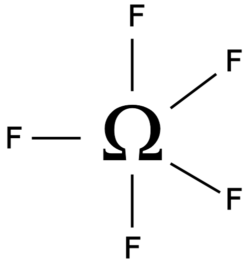
Solução: O composto (1) apresenta 4 átomos de flúor coplanares. Assim:



∅ apresenta 8 elétrons no último nível, ou seja, ∅ é um gás nobre. Esta constatação conduz imediatamente à letra (D).
O composto (2) tem uma geometria conhecida como "gangorra", ou em inglês "see saw".



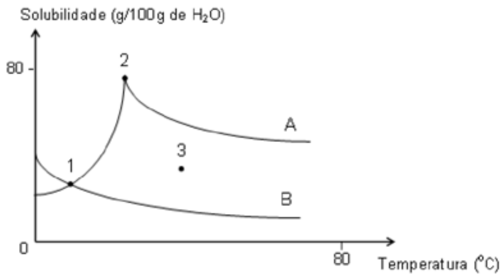
A molécula mais representativa é o SF_4.
O composto (3) tem uma geometria conhecida como “bipirâmide trigonal”. A molécula mais representativa é o $PC\ell_5$.



Opção: Letra D.

---

34. A figura a seguir representa as curvas de solubilidade de duas substâncias A e B.



Com base nela, pode-se afirmar que:
(A) No ponto 1, as soluções apresentam a mesma temperatura mas as solubilidades de A e B são diferentes.
(B) A solução da substância A está supersaturada no ponto 2.
(C) As soluções são instáveis no ponto 3.
(D) As curvas de solubilidade não indicam mudanças na estrutura dos solutos.
(E) A solubilidade da substância B segue o perfil esperado para a solubilidade de gases em água.

Solução:

(A) FALSA – mesma temperatura e solubilidade iguais.
(B) FALSA – não se trata de supersaturação, e sim um ponto de inflexão, normalmente criado pela coexistência de duas “formas” de hidratação, como $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ e $CuSO_4$.
(C) FALSA – A seria insaturada, logo estável. B seria supersaturada, logo instável.
(D) FALSA – O ponto (2) é ponto de inflexão da substância A, logo mudança de estrutura do soluto.
(E) VERDADEIRA – A solubilidade dos gases é decrescente com a temperatura.

Opção: Letra E.

---

35. Um isótopo de cromo, de massa atômica 54, constitui 53% da massa de um óxido formado exclusivamente pelo isótopo e por oxigênio. A partir dessa informação, pode-se estimar que a fórmula mínima do óxido e o calor específico do cromo-54 são:

(A) CrO_3 e 0,12 cal/(g.ºC)
(B) CrO_3 e 0,18 cal/(g.ºC)
(C) Cr_2O_6 e 0,12 cal/(g.ºC)
(D) Cr_2O_3 e 0,16 cal/(g.ºC)
(E) Cr_4O e 0,18 cal/(g.ºC)

Solução:
$^{54}CrO_x \Rightarrow MM = 54 + 16x$

Logo: % Cr = $\dfrac{54}{54 + 16x} \cdot 100 = 53$

$54 \cdot 53 + 166 \cdot 53x = 5.400$

$848\,x = 5.400 - 2.862 = 2.538$

$x = \dfrac{2.538}{848} = 2,99 \approx 3$

Logo, CrO_3.

Utilizando a regra de Dulong-Petit: $\langle MM \rangle_{cr} \cdot c_{cr} \cong 6,4$
$54 \cdot c = 6,4$

$c = \dfrac{6,4}{54} = 0,119$ cal/(g · ºC) $\cong$ 0,12 cal/(g · ºC)

Opção: Letra A.

---

36. Uma empresa de galvanoplastia produz peças especiais recobertas com zinco. Sabendo que cada peça recebe 7 g de Zn, que é utilizada uma corrente elétrica de 0,7 A e que a massa molar do zinco é igual a 65 g/mol, qual o tempo necessário para o recobrimento dessa peça especial?

(Constante de Faraday: 1 F = 96500 $C.mol^{-1}$)

(A) 4 h e 45 min.
(B) 6 h e 30 min.
(C) 8 h e 15 min.
(D) 10 h e 30 min.
(E) 12 h e 45 min.

Solução:
Semirreação de redução do Zinco: $Zn^{+2}_{(aq)} + 2e^- \rightarrow Zn_{(s)}$

Cálculo do tempo:

$$1\text{mol de Zn} \text{ — } 65\text{g} \text{ — } 2 \text{ mol de } e^{-} \text{ x } \frac{96.500\text{C}}{1\text{mol de } e^{-}}$$

$$7\text{g} \text{ — } 0{,}7 \cdot t$$

t = 29.692,31 s

$$\frac{t = 29.692{,}31 \text{ s}}{3.600 \text{ s}} \cdot 1\text{h} = 8\text{h} + 0{,}25\cancel{\text{h}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1\cancel{\text{h}}} = 15 \text{ min}.$$ Logo, o tempo será: 8h 15min.

Opção: Letra C.

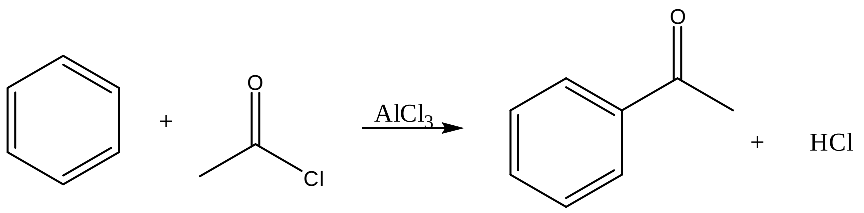
---

37. O benzeno sofre acilação de Friedel-Crafts, com $AlCl_3$ a 80ºC, produzindo a fenil metil cetona com rendimento acima de 80%. Para que esta reação ocorra, é necessária a presença de um outro reagente. Dois exemplos possíveis deste outro reagente são:

(A) cloreto de etanoíla e etanoato de etanoíla.
(B) propanona e ácido etanoico.
(C) brometo de etanoíla e metanal.
(D) brometo de propanoíla e etanoato de etila.
(E) etanol e etanal.

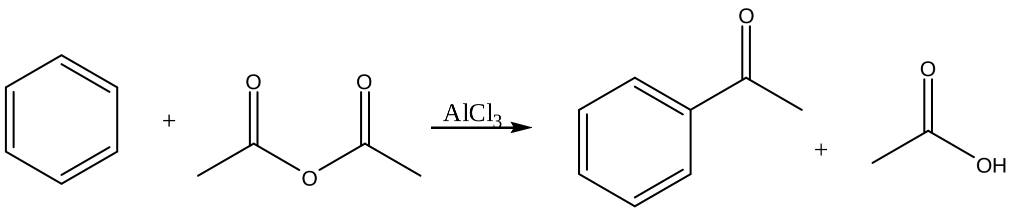
Solução:

A acilação (alcanoilação) de Friedel-Crafts é uma substituição eletrofílica em aromáticos utilizada pra formar ligações carbono-carbono. A fenil metil cetona (acetofenona), produto da reação apresenta um grupamento acila (também denominado etanoíla ou acetila).
Dentre as alternativas apresentadas, o cloreto de etanoíla e o etanoato de etanoíla são os reagentes adequados para a acilação do benzeno.



Cloreto de etanoíla

fenil metil cetona (acetofenona)



etanoato de etanoíla (anidrido etanóico)

fenil metil cetona (acetofenona)

Opção: Letra A.

38. “A Olimpíada deve ser disputada sem o fantasma da fraude química, dentro do princípio de que, tanto quanto é importante competir, vencer é a prova de competência”. (Jornal “O Globo”, 28/05/2016)
Considere que um atleta tenha consumido 64 mg de um anabolizante e que, após 4 dias, o exame antidoping tenha detectado apenas 0,25 mg deste composto. Assumindo que a degradação do anabolizante no organismo segue uma cinética de 1ª ordem, assinale a alternativa que apresenta o tempo de meia-vida da substância no organismo do atleta.

(A) 4 horas
(B) 6 horas
(C) 8 horas
(D) 12 horas
(E) 48 horas

Solução:
Conversão do tempo para horas:

$$\text{tempo} = 4 \text{ dias} \equiv 4\ \cancel{\text{dias}} \times \frac{24\,\text{h}}{1\ \cancel{\text{dia}}} = 96\,\text{horas}.$$

Sabendo que o processo ocorre com uma cinética de primeira ordem, a expressão matemática é dada por:

$$\ell n\left\{\frac{M_{A_F}}{M_{A_i}}\right\} = -K \cdot t \qquad \begin{matrix} M_{A_{F = \text{massa do anabolizante final}}} \\ M_{A_{i = \text{massa do anabolizante inicial}}} \end{matrix}$$

$$\ell n\left\{\frac{0{,}25\ \cancel{mg}}{64\ \cancel{mg}}\right\} = -k \cdot 96\,h$$

$$\ell n\left\{\frac{1}{256}\right\} = -96 \cdot k =>$$

$$\ell n\left(2^{-8}\right) = -96 \cdot k$$

$$-\underset{1}{\overset{\wedge}{\cancel{8}}} \cdot \ell n(2) = -\underset{\cancel{12}}{\overset{12}{\cancel{96}}} \cdot k => \quad k = \frac{0{,}693}{12}$$

$$k = 0{,}0577\ \ h^{-1}$$

Cálculo do tempo de meio-vida ($t_{1/2}$):

$$t_{1/2} = \frac{\ell n2}{k} = \frac{\ell n2}{0{,}0577} = 12\,h$$

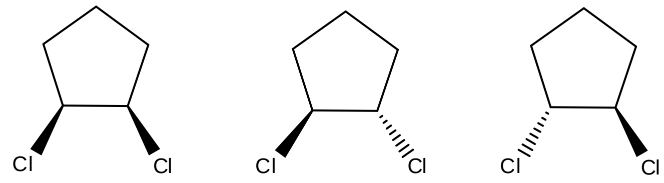
Opção: Letra D.

39. Assinale a alternativa correta.

(A) O 1,2-diclorociclopentano pode ser encontrado em duas configurações estereoisoméricas.
(B) O metilcicloexano pode ser encontrado em duas configurações estereoisoméricas, que diferem entre si na posição do grupo metila (equatorial ou axial).
(C) Existem dois enantiômeros do 1,3-dibromopropadieno.
(D) Existem três diastereoisômeros do 1,4-diclorocicloexano.
(E) Existem dois enantiômeros do 1,2-dicloroeteno.

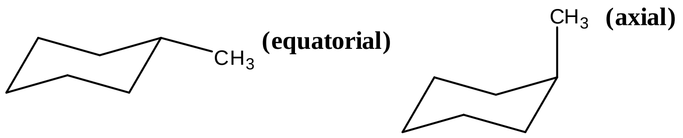
Solução:

(A) Incorreta: o 1,2-diclorociclopentano apresenta três configurações estereoisômeras.

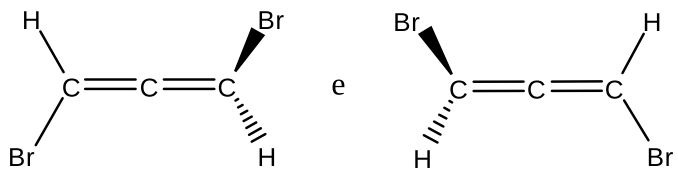


meso (cis) *d (trans)* *l (trans)*

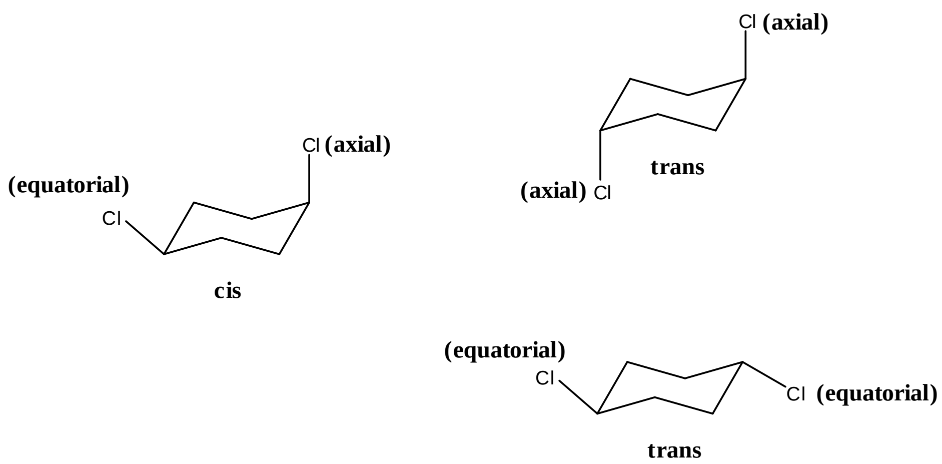
(B) Incorreta: o metilcicloexano apresenta duas conformações e não duas configurações estereoisômeras.



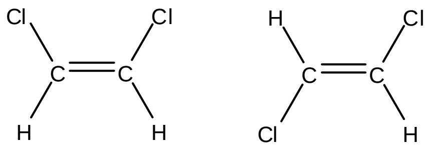
(C) Correta: o 1,3-dibromopropadieno apresenta duas estruturas assimétricas (quirais), ou seja, apresenta dois enantiômeros.



(D) Incorreta: o 1,4-diclorocicloexano apresenta dois diasteroisômeros.



(E) Incorreta: o 1,2-dicloroeteno apresenta dois diasteroisômeros.



cis **trans**

Opção: Letra C.

---

40. Considere a reação, em equilíbrio, de produção do alvejante gasoso dióxido de cloro, que ocorre em um sistema reacional:

$$C\ell_2(g) + 2\ NaC\ell O_2 = (s) \quad 2\ C\ell O_2(g) + 2\ NaC\ell(s)$$

Nessa situação, assinale a alternativa correta.

(A) A adição de mais clorito de sódio ao sistema desloca o equilíbrio da reação, de forma a produzir mais alvejante gasoso.
(B) A razão entre as constantes de equilíbrio K_P/K_C é igual a 0,0820568·T, em que T é a temperatura do sistema reacional, medida em kelvin.
(C) A retirada parcial de cloreto de sódio do sistema desloca o equilíbrio da reação, de forma a produzir menos alvejante gasoso.
(D) A constante de equilíbrio K_p é igual à de equilíbrio K_c.
(E) Para duas diferentes temperaturas do sistema reacional, desde que elevadas e compatíveis com a manutenção do equilíbrio, o valor numérico da constante de equilíbrio K_P é o mesmo, mantendo inalterada a produção de alvejante gasoso.

Solução:

a. Adição de clorito de sódio não afeta o equilíbrio químico, uma vez que se trata de um sólido $(a_{\text{Nac}\ell 02} = 1)$; (Errada)
b. Sabendo que a relação entre K_p e K_c é dado por:
$K_p = K_c \cdot (\text{RT})^{\Delta n}$, onde $\Delta n = n_{\text{produtos}} - n_{\text{reagentes}} = 2 - 1 = 1$
Logo: $\dfrac{K_p}{K_c} = (\text{RT})1 = (0,08206 \cdot \text{T})$. (Correta)
c. A diminuição de cloreto de sódio (Nacℓ) não influencia na equilíbrio químico, uma vez que, por convenção a atividade de um sólido é unitário, ou seja, $a_{\text{Nac}\ell} = 1$.(Errada)
d. A relação entre a constante de equilíbrio em função das pressões parciais (K_p) com a constante de equilíbrio em função da concentração é igual a $\dfrac{K_p}{K_c} = (\text{RT})$, conforme já mencionado no item b.(Errada)
e. Conforme a equação de Van't Hoff, $\dfrac{d\ell nK}{dT} = \dfrac{\Delta H^o}{RT^2}$, a constante de equilíbrio muda com a mudança da temperatura. (Errada)

Opção: Letra B.

Comentário de Química
A prova manteve um nível adequado para seleção dos alunos mais preparados. Sentimos falta de questões envolvendo estequiometria, propriedades coligativas e radioatividade.

Equipe de Química

Alexandre Grillo
Bruno Berner
Eurico Dias
Jorge Ferreira
Nelson Santos